Übungen zu Mathematik III für Physiker

Prof. Dr. P. Pickl

Blatt 1

Aufgabe 1

(a) Berechnen Sie $\int_{[0,\pi]^3} x^2 y \sin z$ dxdydz.

(b) Seien $r, h > 0$ und der Zylinder M gegeben durch $M := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | 0 \leq z \leq h; x^2 + y^2 \leq r^2\}$ berechnen Sie
$\int_M x^2 z$ dxdydz

Aufgabe 2

Sei $B \subset \mathbb{R}^2$, $f = \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ stetig. Zeigen Sie, dass

$$\int_B f(x, y) dxdy = \int_{\phi_1}^{\phi_2} \int_{r_1(\phi)}^{r_2(\phi)} f(r cos\phi, r \sin \phi) r dr d\phi \ .$$

Hier bezeichnen r und ϕ Polarkoordinaten des Systems und ϕ_1, ϕ_2, r_1 und r_2 sind so, dass

$$(x, y) \in \overline{B} \Leftrightarrow \exists \phi \in [\phi_1, \phi_2] \text{ und } r \in [r_1(\phi), r_2(\phi)] \text{ so dass } (x, y) = (r \cos \phi, r \sin \phi) \ .$$

Aufgabe 3

(a) Berechnen Sie das 1-dimensionale Gaußintegral

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha x^2} dx$$

für $\alpha > 0$. Hinweis: Berechnen Sie $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha x^2} dx \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha y^2} dy$. Benutzen Sie dabei Polarkoordinaten.

(b) Sei $A \in \mathrm{Hom}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ symmetrisch und positiv definit (d.h. alle Eigenwerte $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ von A sind positiv). Es bezeichne $D = \mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ die Diagonalmatrix mit den Einträgen $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$. Weiter sei $\boldsymbol{x}^T = (x_1, \ldots x_n) \in \mathbb{R}^n$. Zeigen Sie, dass

$$\int_{\mathbb{R}^n} e^{-\boldsymbol{x}^T A \boldsymbol{x}} d^n\boldsymbol{x} = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\boldsymbol{y}^T D \boldsymbol{y}} d^n\boldsymbol{y} = \sqrt{\frac{\pi^n}{\det A}} \,.$$

(c) Berechnen Sie nun die zur obigen Gaußverteilung gehörende Kovarianzmatrix. Die Einträge der Kovarianzmatrix sind definiert als

$$C_{ij} = \int_{\mathbb{R}^n} x_i x_j e^{-\boldsymbol{x}^T A \boldsymbol{x}} d^n\boldsymbol{x}.$$

Stellen Sie eine Verbindung zwischen der Matrix A und der Kovarianzmatrix her. Hinweis: Erinnern Sie sich an die Formel zur Bestimmung des Inversen einer Matrix über die Entwicklung von Determinanten.

Aufgabe 4

Die Länge einer Kurve K ist definierbar als

$$L(K) = \int_I \sqrt{|\Phi'(t)|^2} dt \,,$$

wobei $\Phi : I \subset \mathbb{R} \to K$ ein die Kurve einfach durchlaufender Weg ist.
Sei $f : [0,1] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = (1 - \frac{2}{3}x)^{\frac{3}{2}}$.

(a) Berechnen Sie die Länge des Graphen von f.

(b) Finden Sie nun $s : [0,1] \to [0, L(K)]$ so, dass $\lambda(q) = \Phi \circ s^{-1}(q)$, mit Φ wie in Teil (a), die Parametrisierung ist, die die Kurve mit Geschwindigkeit 1 durchläuft. (Analog der Eigenzeit in der relativistischen Physik.

Abgabe: Montag, 30.10.2017 , 10 Uhr.
Bitte werfen Sie Ihre Lösungen entweder in den Übungskasten im ersten Stock in der Theresienstraße 39 ein, oder legen Sie diese vor der Vorlesung am 30.10. auf den Tisch neben dem Pult! Schreiben Sie bitte auf jeden Fall unbedingt Ihre Namen und die Übungsgruppe auf jedes Blatt!!! Heften Sie Ihre Lösungen bitte zusammen!