MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT MÜNCHEN WS 2017/18

Übungen zu Mathematik III für Physiker

Prof. Dr. P. Pickl

Probeklausur Lösungen

Aufgabe 1: Gegeben sei das Vektorfeld $\mathbf{u} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \mathbf{u}(x, y) = \begin{pmatrix} -xy \\ \frac{1}{2}x^2 \end{pmatrix}$. Integrieren Sie $\mathbf{u}$ über den Rand des Kreises mit Radius R

(a) durch explizite Berechnung von $\oint_{S^1(R)} \mathbf{u} \cdot d\mathbf{s}$,

(b) durch Anwendung des Satzes von Stokes!

Lösung Wir benutzen Polarkoordinaten $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = r \begin{pmatrix} \cos(\varphi) \\ \sin(\varphi) \end{pmatrix}$.

(a) Der Rand des Kreises mit Radius R wird parametrisiert durch

$$\gamma(\varphi) = R \begin{pmatrix} \cos(\varphi) \\ \sin(\varphi) \end{pmatrix}, \quad \gamma'(\varphi) = R \begin{pmatrix} -\sin(\varphi) \\ \cos(\varphi) \end{pmatrix}, \quad \varphi \in [0, 2\pi[.$$

Dann ist

$$\oint_{S^1(R)} \mathbf{u} \cdot d\mathbf{s} = \int_0^{2\pi} d\varphi \begin{pmatrix} -R^2 \sin(\varphi)\cos(\varphi) \\ \frac{1}{2}R^2\cos^2(\varphi) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -R\sin(\varphi) \\ R\cos(\varphi) \end{pmatrix}$$

$$= R^3 \left(\int_0^{2\pi} d\varphi \sin^2(\varphi)\cos(\varphi) + \frac{1}{2}\cos^3(\varphi) \right).$$

Das zweite Integral ist durch partielle Integration

$$I := \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} d\varphi \cos(\varphi)\frac{1}{2}\cos^2(\varphi) = \sin(\varphi)\frac{1}{2}\cos^2(\varphi)\Big|_0^{2\pi} + \int_0^{2\pi} d\varphi \sin^2(\varphi)\cos(\varphi)$$

$$= \int_0^{2\pi} d\varphi \sin^2(\varphi)\cos(\varphi) = \int_0^{2\pi} d\varphi (1 - \cos^2(\varphi)\cos(\varphi) = \int_0^{2\pi} \cos(\varphi) d\varphi - 2I.$$

Wegen $\int_0^{2\pi} \cos(\varphi)d\varphi = 0$ folgt $I = 0$ und insgesamt ist somit

$$\oint_{S^1(R)} \mathbf{u} \cdot d\mathbf{s} = R^3(I + I) = 0.$$

(b) Wir erweitern das Problem auf drei Dimensionen, um die Rotation zu berechnen:

$$\mathrm{rot}(\mathbf{u}) = \begin{pmatrix} \partial_x \\ \partial_y \\ \partial_z \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -xy \\ \frac{1}{2}x^2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ x-(-x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2x \end{pmatrix}$$

Das Flächenelement des Kreises ist bekanntlich $d\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{e}_z r d\varphi dr$ (oder durch Kreuzprodukt berechnen), damit berechnen wir nach dem Satz von Stokes

$$\oint_{S^1(R)} \mathbf{u} \cdot d\mathbf{s} = \int_{B^1(R)} \mathrm{rot}(\mathbf{u}) d\boldsymbol{\sigma} = \int_{B^1(R)} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2x \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} r d\varphi dr$$

$$= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^R dr\ r \cdot 2x = 2\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^R dr\ r^2 \cos(\varphi) \overset{*}{=} \frac{2R^3}{3} \int_0^{2\pi} \cos(\varphi) = 0.$$

Begründung zu (*): Wegen der Stetigkeit des Integranden und weil über eine beschränkte Menge integriert wird, dürfen wir die Integrationsreihenfolge nach dem Satz von Fubini beliebig wählen.

Aufgabe 2:

(a) Ist die Funktion $h : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $h(z) = i \cdot \mathrm{Im}(z)^2$ holomorph? Beweisen Sie Ihre Antwort!

(b) Es sei $f_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, f_1(x,y) = x^3 - 3xy^2$. Bestimmen Sie alle Funktionen $f_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, so dass $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}, f(x+iy) = f_1(x,y) + if_2(x,y)$ holomorph ist!

(c) Bestimmen Sie den maximalen Definitionsbereich $D \subset \mathbb{C}$ sowie Lage und Art der Singularitäten der Funktion g gegeben durch

$$g(z) = \frac{z+2}{z^2-i} e^{\frac{1}{z+2}}.$$

Lösung

(a) Die Funktion h ist nicht holomorph. *Ich führe drei Beweismöglichkeiten vor, jede einzelne ist natürlich ausreichend und korrekt!*
Beweis 1: Wir können $h(x+iy) = h_1(x,y) + ih_2(x,y)$ schreiben mit $h_1(x,y) = 0$ und $h_2(x,y) = y^2$. Die Funktionen h_1 und h_2 sind stetig differenzierbar, aber sie erfüllen nicht die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen, da z.B.

$$\partial_x h_1(x,y) = 0 \neq 2y = \partial_y h_2(x,y).$$

Somit ist h nach dem Satz aus der Vorlesung nicht holomorph.
Beweis 2: Betrachte für reelle q die beiden Limiten, die für holomorphes h gleich $h'(i)$ sein müssten.

$$\lim_{q\to 0} \frac{h(i+q) - h(i)}{q} = \lim_{q\to 0} \frac{i-i}{q} = 0,$$

$$\lim_{q\to 0} \frac{h(i+iq)-h(i)}{iq} = \lim_{q\to 0} \frac{i(1+q)^2-i}{iq} = \lim_{q\to 0} \frac{2q+q^2}{q} = 2.$$

Somit existiert $h'(i)$ nicht und h ist nicht holomorph.
Beweis 3: Für alle reellen z ist $\mathrm{Im}(z) = 0$, also erfüllt h dort die Eigenschaft $h(z) = 0$. $\mathbb{R}$ ist eine Menge mit einem (sogar unendlich vielen) Häufungspunkt in $\mathbb{C}$. Wenn h holomorph ist, muss also nach dem Identitätssatz h überall gleich der holomorphen Funktion $z \mapsto 0$ sein. Das ist aber nicht der Fall, da z.B. $h(i) = 1 \neq 0$, also kann h nicht holomorph sein.

(b) Damit f holomorph ist, müssen die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen erfüllt sein, also

$$\partial_y f_2(x,y) = \partial_x f_1(x,y) = 3x^2 - 3y^2,$$
$$\partial_x f_2(x,y) = -\partial_y f_1(x,y) = 6xy.$$

Die erste Differentialgleichung erfordert, dass $f_2(x,y) = 3x^2y - y^3 + c(x)$. Dies erfüllt die zweite Zeile nur dann, wenn $\partial_x c(x) = 0$, also wenn es konstant ist. Somit folgt, dass alle Funktionen gegeben sind durch

$$f_2(x,y) = 3x^2y - y^3 + c, \quad c \in \mathbb{R}.$$

Bemerkung: Die Funktion f ist dann übrigens einfach $f(z) = z^3 + ic$.

(c) Die Nullstellen des Nenners sind $z^2 = i = e^{i\pi/2} \Rightarrow z_1 = e^{i\pi/4}, z_2 = e^{i5\pi/4}$. Somit ist der maximale Definitionsbereich $D = \mathbb{C} \setminus \{z_1, z_2, -2\}$, in dieser Menge ist g holomorph.
z_1 und z_2 sind Pole erster Ordnung, da

$$\lim_{z\to z_{1/2}} |g(z)| = \infty,$$

aber

$$\lim_{z\to z_1} |(z-z_1)g(z)| = \lim_{z\to z_1} |\frac{z+2}{z-z_2} e^{\frac{1}{z+2}}| < \infty$$

und ähnlich für z_2.
Bei -2 hat g eine wesentliche Singularität. Um das zu zeigen, suchen wir zwei Folgen, die beide gegen -2 konvergieren, aber so dass g angewendet auf diese Folgen verschiedene Limiten gibt. Betrachte $x_n = -2 + \frac{1}{n}$, dann ist

$$\lim_{n\to\infty} |g(x_n)| = \lim_{n\to\infty} |\frac{\frac{1}{n}}{x_n^2 - i} e^n| = \infty.$$

Hingegen für $y_n = -2 - \frac{1}{n}$

$$\lim_{n\to\infty} |g(x_n)| = \lim_{n\to\infty} |\frac{-\frac{1}{n}}{y_n^2 - i} e^{-n}| = 0.$$

Hierbei wurde die bekannte Eigenschaft der Expontentialfunktion ausgenutzt, dass sie "schneller" konvergiert als jedes Polynom.

Aufgabe 3: Berechnen Sie folgende Integrale!

(a)
$$\int_{\partial B_2(i)} \frac{\sin(z)}{(z-2i)^2(z-3)}$$

Dabei bezeichnet $\partial B_r(z)$ den Rand des Kreises um z mit Radius r.

(b)
$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{i}{1+x^2} dx$$

Benutzen Sie für dieses Integral den Residuensatz und achten Sie auf genaue Begründungen!

Lösung

(a) Da $|i-3| > 2$, ist die Funktion $f(z) = \frac{\sin(z)}{z-3}$ in $\overline{B}_2(i)$ holomorph. Die Nullstelle des Nenners bei $2i$ hingegen liegt innerhalb des Integrationsbereiches. Die Cauchy-Integralformel für Ableitungen liefert

$$f'(2i) = \frac{1!}{2\pi i} \int_{\partial B_2(i)} \frac{f(z)}{(z-2i)^{1+1}} dz,$$

also ist das gesuchte Integral

$$\int_{\partial B_2(i)} \frac{f(z)}{(z-2i)^2} dz = 2\pi i f'(2i) = 2\pi i \frac{(z-3)\cos(z) - \sin(z)}{(z-3)^2}\bigg|_{z=2i} =$$

$$= \frac{2\pi i}{(2i-3)^2} \left((2i-3)\cos(2i) - \sin(2i)\right).$$

(b) Wir berechnen das Integral durch Erweiterung auf die komplexe Ebene. Sei γ_R der Weg von $-R$ bis R entlang der reellen Achse und dann zurück zu $-R$ über den Halbkreis mit Radius R in der oberen Halbebene (Bild malen bitte, ist einfacher!). Wir behaupten, dass

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{i}{1+x^2} dx = \lim_{R\to\infty} \int_{\gamma_R} \frac{i}{1+z^2} dz.$$

Beweis der Behauptung: Es ist zu zeigen, dass im Grenzfall $R \to \infty$ der Bogen des Halbkreises keinen Beitrag zum Integral ergibt. Parametrisierung des Halbkreises:

$$\gamma(\varphi) = Re^{i\varphi}, \varphi \in [0, \pi], \quad \gamma'(\varphi) = iRe^{i\varphi}.$$

Dann ist

$$\left| \int_\gamma \frac{i}{1+z^2} dz \right| \leq \int_0^\pi d\varphi \left| iRe^{i\varphi} \frac{i}{1+R^2 e^{2i\varphi}} \right| \sim \frac{R}{1+R^2} \sim \frac{1}{R}$$

Durch "Power-Counting", also Zählen der Potenzen im Integranden, sehen wir, dass für große R der Betrag wie $\frac{1}{R}$ skaliert und somit das Integral für $R \to \infty$ gegen Null geht. Damit bleibt nur der Beitrag auf der reellen Achse übrig und die Behauptung ist bewiesen.
Wegen

$$\frac{i}{1+z^2} = \frac{i}{(z-i)(z+i)},$$

ist die Funktion $f : \mathbb{C} \setminus \{-i, i\} \to \mathbb{C}, f(z) = \frac{i}{1+z^2}$ holomorph, also im Inneren des Weges γ_R meromorph. Also können wir den Residuensatz verwenden. γ_R ist ein geschlossener Weg gegen den Uhrzeigersinn, der den Pol bei i einmal umläuft (und den Pol bei $-i$ gar nicht!). Nach der Formel für das Residuum von Blatt 8 folgt

$$\mathrm{Res}(f, i) = (z-i) \cdot f(z)|_{z=i} = \frac{i}{2i} = \frac{1}{2}.$$

Also nach dem Residuensatz:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{i}{1+x^2} dx = \lim_{R\to\infty} \int_{\gamma_R} \frac{i}{1+z^2} dz = \lim_{R\to\infty} 2\pi i \mathrm{Res}(f, i) = \pi i.$$

Hinweis: Da vielleicht manchen bekannt ist, dass $\frac{1}{1+x^2}$ die Ableitung des Arcustangens ist, hätte man diese Aufgabe auch ohne den Residuensatz lösen können, aber wir werden schon auch noch welche finden, bei denen man ihn unbedingt braucht...

$$i \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2} dx = i \cdot \arctan(x)|_{-\infty}^{\infty} = i \cdot (\tfrac{\pi}{2} - \tfrac{-\pi}{2}) = \pi i.$$

Aufgabe 4:

(a) Es sei $\Omega = \{a, b, c, d, e, f\}$ und eine Teilmenge $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(\Omega)$ der Potenzmenge von Ω definiert durch

$$M \in \mathcal{A} \Leftrightarrow a \in M.$$

Ist $\mathcal{A}$ eine σ-Algebra? Beweisen Sie Ihre Antwort!

(b) Es sei nun $\mathcal{A}' \subset \mathcal{P}(\Omega)$ definiert durch

$$M \in \mathcal{A}' \Leftrightarrow M \subset \{a, b, c\} \text{ oder } \{d, e, f\} \subset M.$$

Beweisen Sie, dass $\mathcal{A}'$ eine σ-Algebra ist!

Lösung

(a) $\mathcal{A}$ ist keine σ-Algebra. Dies scheitert an der Komplementbildung, z.B. ist $\Omega \in \mathcal{A}$, aber $\Omega^c = \emptyset \notin \mathcal{A}$, da natürlich $a \notin \emptyset$ ist.
Ein anderes Beispiel wäre $\{a\} \in \mathcal{A}$, aber $\{a\}^c = \{b, c, d, e, f\} \notin \mathcal{A}$.

(b) Wir überprüfen die drei definierenden Eigenschaften einer σ-Algebra:
i) Da $\{d, e, f\} \subset \Omega$, ist $\Omega \in \mathcal{A}'$.
ii) Sei $M \in \mathcal{A}'$. Dann unterscheiden wir zwei Fälle:
Erster Fall $M \subset \{a, b, c\}$. Das heißt ja, dass d, e, f alle nicht in M enthalten sein können und somit in M^c sein müssen, also $\{d, e, f\} \subset M^c$ und somit $M^c \in \mathcal{A}'$.
Zweiter Fall $\{d, e, f\} \subset M$. Das heißt, dass d, e, f alle in M enthalten sind und somit nicht in M^c, also gilt $M^c \subset \{d, e, f\}^c = \{a, b, c\} \ \Rightarrow M^c \in \mathcal{A}'$.
iii) Seien $M_n \in \mathcal{A}' \ \forall n \in \mathbb{N}$. Nun gibt es wieder eine Fallunterscheidung:
Erster Fall: $\{d, e, f\} \subset M_j$ für mindestens ein $j \in \mathbb{N}$. Dann ist auch

$$\{d, e, f\} \subset M_j \subset \cup_{n\in\mathbb{N}} M_n \ \Rightarrow \cup_{n\in\mathbb{N}} M_n \in \mathcal{A}'.$$

Zweiter Fall: $\{d, e, f\} \subset M_j$ gilt für kein einziges j, also muss aber, damit alle $M_n \in \mathcal{A}'$ sein können, dann gelten: $M_n \subset \{a, b, c\} \ \forall n \in \mathbb{N}$. Somit ist

$$\cup_{n\in\mathbb{N}} M_n \subset \{a, b, c\} \ \Rightarrow \cup_{n\in\mathbb{N}} M_n \in \mathcal{A}'.$$

Fertig.
Tipp für solche Aufgaben in der Klausur: Erstmal Definition hinschreiben!
Bemerkung: Ganz pfiffige Leute haben vielleicht gemerkt, dass die Aussage $\{d, e, f\} \subset M$ logisch äquivalent ist zu $M^c \subset \{d, e, f\}^c = \{a, b, c\}$ und somit die Aufgabe nur eine Umformulierung von der Aufgabe 1 auf Blatt 9 ist.

Aufgabe 5: Es sei $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum. Die Zufallsvariable $X : \Omega \to \mathbb{R}$ sei normalverteilt mit der Wahrscheinlichkeitsdichte

$$\rho(x) = Ce^{-\lambda x^2}.$$

Hier ist $\lambda > 0$. Berechnen Sie (explizit!) den Wert der Konstanten C und die Varianz von X!

Lösung Die Konstante C muss so gewählt sein, dass die Verteilung normiert ist, das heißt

$$\int_{\mathbb{R}} \rho(x) dx = 1.$$

Wir kennen das Gauß-Integral

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-\lambda x^2} dx = \sqrt{\frac{\pi}{\lambda}},$$

also folgt

$$C = 1 : \sqrt{\frac{\pi}{\lambda}} = \sqrt{\frac{\lambda}{\pi}}.$$

Zur Berechnung der Varianz von X bemerken wir zunächst, dass die Wahrscheinlichkeitsdichte symmetrisch ist: $\rho(x) = \rho(-x)$, somit folgt ohne Rechnen schon, dass

$$\mathbb{E}(X) = \mathbb{E}(-X) = -\mathbb{E}(X) \quad \Longrightarrow \mathbb{E}(X) = 0.$$

Für das Quadrat des Erwartungswertes rechnen wir

$$\mathbb{E}(X^2) = \int_{\mathbb{R}} x^2 \rho(x) dx = C \int_{\mathbb{R}} x e^{-\lambda x^2} \cdot x \ dx$$

und mit partieller Integration, da $xe^{-\lambda x^2} = \frac{-1}{2\lambda}(e^{-\lambda x^2})'$, (Randterme verschwinden)

$$= C \frac{1}{2\lambda} \int_{\mathbb{R}} e^{-\lambda x^2} \cdot 1 \ dx = \sqrt{\frac{\lambda}{\pi}} \frac{1}{2\lambda} \sqrt{\frac{\pi}{\lambda}} = \frac{1}{2\lambda}.$$

Somit ist

$$\mathrm{Var}(X) = \mathbb{E}(X^2) = \frac{1}{2\lambda}.$$