MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT MÜNCHEN

WS 2017/18

Übungen zu Mathematik III für Physiker

Prof. Dr. P. Pickl

Blatt 9

Aufgabe 1: Sei $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(\Omega)$, wobei $\mathcal{P}(\Omega)$ die Potenzmenge der Menge Ω bezeichnet. Sei $M \subset \Omega$. Es gelte

$$E \in \mathcal{A} \Leftrightarrow E \subset M \text{ oder } E^c \subset M.$$

Zeigen Sie: $\mathcal{A}$ ist eine σ-Algebra.

Aufgabe 2: Gegeben sei eine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Für jede Teilmenge $A \subset R$ sei $\lambda(A) := \sup\left(\{0\} \cup \{|f(\omega)| : \omega \in A\}\right)$.

Zeigen Sie: Durch λ ist auf der Potentzmenge von $\mathbb{R}$ ein äußeres Maß definiert.

Welche Teilmengen von $\mathbb{R}$ sind messbar für den Fall $f(x) = \sin x$?

Aufgabe 3: Sei $\mathcal{A}$ die von allen abgeschlossenen Intervallen aus $\mathbb{R}$ erzeugte σ-Algebra.

Zeigen Sie: $\mathcal{A}$ ist genau die Borelsche σ-Algebra über $\mathbb{R}$.

Aufgabe 4: Sei $\mathcal{A}$ eine σ-Algebra. Sei $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset A$ eine Folge von Elementen dieser σ-Algebra. Sei X die Menge gegeben durch: $\omega \in X$ falls $\omega \in A_n$ für unendlich viele $n \in \mathbb{N}$. Sei Y die Menge gegeben durch: $\omega \in Y$ falls $\omega \in A_n$ für alle bis auf endlich viele $n \in \mathbb{N}$.

Zeigen Sie: X und Y sind Elemente der σ-Algebra $\mathcal{A}$.

Hinweis: Zeigen Sei zunächst, dass $\omega \in X$genau dann, wenn für jedes $n \in \mathbb{N}$ ein $k > n$ existiert mit $\omega \in A_k$. Versuchen Sie dann, X durch Vereinigungen und Schnitte aus den A_k zu konstruieren. Gehen Sie bei Y ähnlich vor.

Abgabe: Montag, 08.01.2018 , 10 Uhr.