

Übungen zu Mathematik III für Physiker

Prof. Dr. P. Pickl
Blatt 7

Aufgabe 1:

Sei $E \subset \mathbb{C}$ ein Elementargebiet, $a \in E$ und $f : E \setminus \{a\} \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph. Zeigen Sie:

- (a) a ist ein Pol $\Leftrightarrow \lim_{z \rightarrow a} |f(z)| = \infty$.
- (b) a ist eine wesentliche Singularität \Leftrightarrow es existieren Folgen $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = \lim_{n \rightarrow \infty} z_n = a$ und $\lim_{n \rightarrow \infty} |f(y_n)| \neq \lim_{n \rightarrow \infty} |f(z_n)|$

Aufgabe 2: Bestimmen Sie den maximalen Definitionsbereich, sowie Lage und Art aller Singularitäten der Funktion f gegeben durch

$$f(z) = \frac{z - i}{z^2 + 1} \sin \frac{1}{z}.$$

Aufgabe 3: Bestimmen Sie (unter Verwendung des Residuensatzes) den Wert des folgenden Integrals

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{(x^2 + 4)^2} dx \quad (x \in \mathbb{R})$$

Achten Sie auf saubere Argumentation.

Aufgabe 4: Sei γ_r der Pfad mit einfacher, positiver Umlaufzahl entlang entlang eines Kreisringes mit Mittelpunkt i und mit Radius r . Bestimmen Sie für alle $r \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1, 3\}$

$$\int_{\gamma_r} \frac{1}{z^4 + 4z^2} dz$$

Abgabe: Montag, 10.12.2017, 10 Uhr.