MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT MÜNCHEN

WS 2011/2012

Blatt 12 der Übungen zu Mathematik III für Physiker

Prof. Dr. D. Dürr

Aufgabe 1: Seien A, B nichtleere Teilmengen einer Menge Ω. Man konstruiere die von A, B erzeugte σ-Algebra.

Aufgabe 2: Sei $\overline{\mathcal{C}}$ die Menge aller abgeschlossenen und $\mathcal{C}$ die Menge aller offenen Intervalle in $\mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass sowohl $\overline{\mathcal{C}}$ als auch $\mathcal{C}$ beide die Borel-Algebra $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ erzeugen.

Aufgabe 3: Benutzen Sie die Definition der Messbarkeit aus der Vorlesung um zu zeigen, dass

(a) für messbare M_1, M_2 mit $M_1 \cap M_2 = \emptyset$, $\lambda(M_1 \cup M_2) = \lambda(M_1) + \lambda(M_2)$ gilt.

(b) für messbare A und B mit $A \subset B$, $\lambda(B \backslash A) = \lambda(B) - \lambda(A)$ gilt.

Aufgabe 4:

(a) Sei $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge Lebesgue-integriebarer Funktionen, die im Limes $n \to \infty$ auf dem offenen Intervall $(0, 1)$ punktweise gegen eine Lebesgue-integrierbare Funktion f konvergiert. Widerlegen Sie:

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)\lambda(dx) = \int_0^1 f(x)\lambda(dx) \ .$$

(b) Finden Sie eine Funktionenfolge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $f_n : [0, 1] \to \mathbb{R}$ mit $f_n \xrightarrow{n\to\infty} f$ in L^1 (also $\lim_{n\to\infty} \int_0^1 dx|f(x) - f_n(x)| = 0$), für die für alle $x \in [0, 1]$, $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$ nicht existiert.