

Übungen zu Mathematik II für Physiker

Prof. Dr. D. Dürr

Blatt 12

Aufgabe 1: Sei $\underline{f} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$,

$$\underline{f}(x, y, z) = \begin{pmatrix} yz \\ x^4 + y^5 \\ x^3 \cos(y - z) \\ 1 \end{pmatrix}$$

Approximieren Sie $\underline{f}$ linear um den Punkt $(0, 1, 1)$. Berechnen Sie $\underline{f}(\underline{x})$ in dieser linearen Approximation im Punkt $\underline{x} = (\frac{1}{10}, \frac{11}{10}, \frac{11}{10})$. Geben Sie den Fehler an.

Aufgabe 2: Die Transformation in Kugelkoordinaten ist bestimmt durch $\underline{f} : \mathbb{R}_+ \times [0, \pi] \times [0, 2\pi) \to \mathbb{R}^3$, $\underline{f}(\underline{\xi}) = \underline{f}(r, \vartheta, \varphi) = (r \sin\vartheta \cos\varphi, r \sin\vartheta \sin\varphi, r \cos\vartheta)$, mit $\underline{\xi} = (r, \vartheta, \varphi)^t$.

(a) Berechnen Sie die totale Ableitung $\underline{\underline{f}}'$ der Koordinatentransformation, deuten Sie die Spaltenvektoren dieser Matrix geometrisch und skizzieren Sie diese. Welche Basistransformation vermittelt die Matrix?

(b) Bestimmen Sie das normierte begleitende Dreibein $\underline{e}_{\xi^i}$, $i = 1, 2, 3$.

(c) Berechnen Sie das Weglängenquadrat $\mathrm{d}s^2 = \mathrm{d}x_1^2 + \mathrm{d}x_2^2 + \mathrm{d}x_3^2$ in Kugelkoordinaten:

$$\mathrm{d}s^2 = \mathrm{d}\underline{\xi}^t (\underline{\underline{f}}')^t \underline{\underline{f}}' \mathrm{d}\underline{\xi}$$

und geben Sie eine geometrische Deutung.

(d) Zeigen Sie, daß die i-te Zeile der inversen Matrix $(\underline{\underline{f}}')^{-1}$ gegeben ist durch $\left\| \frac{\partial \underline{f}}{\partial \xi^i} \right\|^{-1} e^t_{\xi^i}$ und bestimmen Sie den Nabla-Operator in Kugelkoordinaten, d.h.

$$\sum_i \left\| \frac{\partial \underline{f}}{\partial \xi^i} \right\|^{-1} \underline{e}_{\xi^i} \frac{\partial}{\partial \xi^i}$$

(e) Berechnen Sie $\det \underline{\underline{f}}'$ und interpretieren Sie das Resultat geometrisch.

(f) Sei $\underline{g}(r, \vartheta, \varphi) = r^2 \underline{e}_r + \sin\vartheta \; \underline{e}_\vartheta$. Man berechne die Divergenz des Vektorfeldes $\underline{g}$ in Kugelkoordinaten.

(g) Geben Sie den Laplace Operator Δ in Kugelkoordinaten an und berechnen Sie $\Delta \left(\frac{1}{r}\right)$, für $r > 0$.

Aufgabe 3: Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen. Eine zweimal stetig differenzierbare Funktion $f : U \to \mathbb{R}$ mit $\Delta f(\underline{x}) = 0 \ \forall \underline{x} \in U$ heißt harmonische Funktion. Hier ist Δ der gewöhnliche Laplaceoperator des $\mathbb{R}^n$, also in karthesischen Koordinaten $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \ldots + \frac{\partial^2}{\partial x_n^2}$.

(a) Finden Sie eine Funktion $f : \mathbb{R}^3 \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ mit $\Delta f(\underline{x}) = 0$. Können Sie sich denken, wie die Antwort für $n > 3$ aussieht?

(b) Zeigen Sie, dass für den Fall $n = 2$ die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \to \mathbb{R},\ f(\underline{x}) = \ln(|\underline{x}|)$ harmonisch ist.

Aufgabe 4: Berechnen Sie jeweils Divergenz und Rotation der folgenden Vektorfelder, skizzieren Sie die Vektorfelder und interpretieren Sie Ihre Ergebnisse anhand der Skizzen.

(a)

$$\underline{f} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3,\ \underline{f}(x,y,z) = \begin{pmatrix} x^2 \\ y^2 \\ z \end{pmatrix}$$

(b)

$$\underline{g} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3,\ \underline{g}(x,y,z) = \begin{pmatrix} -y \\ x \\ 0 \end{pmatrix}$$

(c)

$$\underline{h} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3,\ \underline{h}(x,y,z) = \begin{pmatrix} -y \\ x - y \\ -z \end{pmatrix}$$

(d)

$$\underline{k} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3,\ \underline{k}(x,y,z) = \begin{pmatrix} x + z \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Falls Korrektur erwünscht, geben Sie das Blatt bitte in der Übungsgruppe ab, zu der Sie angemeldet sind.

Übungsblätter und Informationen unter:
http://www.mathematik.uni-muenchen.de/~bohmmech/Teaching/MP2SoSe2013/index.php