

Übungen zu Mathematik II für Physiker

Prof. Dr. D. Dürr

Blatt 10

Aufgabe 1:

Erinnerung an die Vorlesung:

Der Schiefkörper \mathbb{H} der Quaternionen wird wie folgt konstruiert. Quaternionen (d.h. Elemente von \mathbb{H}) sind alle Ausdrücke der Form

$$h = h^0 + ih^1 + jh^2 + kh^3$$

mit $h^0, h^1, h^2, h^3 \in \mathbb{R}$ und den drei imaginären Einheiten i, j und k . Die Addition auf \mathbb{H} ist komponentenweise erklärt, d.h. für $h, h' \in \mathbb{H}$ ist

$$h + h' := (h^0 + h'^0) + i(h^1 + h'^1) + j(h^2 + h'^2) + k(h^3 + h'^3).$$

Für die Multiplikation auf \mathbb{H} gilt folgendes:

- (i) Für reelle Zahlen $r (= r + i0 + j0 + k0)$ und r' ist die Multiplikation auf \mathbb{H} die übliche Multiplikation auf \mathbb{R} .
- (ii) $i^2 = j^2 = k^2 = -1$ und $ij = k, jk = i, ki = j$.
- (iii) Die imaginären Einheiten vertauschen mit jeder reellen Zahl r , d.h. $ir = ri, jr = rj$ und $kr = rk$.
- (iv) Für i, j, k und zwei reelle Zahlen r, q gilt das Assoziativgesetz, d.h. $i(ik) = (ii)k, j(ki) = (jk)i, r(jk) = (rj)k, r(qi) = (rq)i, \dots$

Weiter gelten die Distributivgesetze $(h + h')g = hg + h'g$ und $h(g + g') = hg + hg'$. Die zu einem $h \in \mathbb{H}$, mit $h = h^0 + ih^1 + jh^2 + kh^3$, konjugierte Quaternion \bar{h} ist definiert als $\bar{h} = h^0 - ih^1 - jh^2 - kh^3$. Man kann nun zeigen, dass \mathbb{H} mit dieser Addition und Multiplikation ein Schiefkörper ist, dass also alle Körperaxiome mit Ausnahme der Kommutativität der Multiplikation gelten.

- (a) Zeigen Sie, dass die Multiplikation auf \mathbb{H} nicht kommutativ ist und insbesondere $ji = -ij, kj = -jk$ und $ik = -ki$ gilt. Geben Sie die allgemeine Formel für die Multiplikation zweier Quaternionen $x = x^0 + ix^1 + jx^2 + kx^3$ und $y = y^0 + iy^1 + jy^2 + ky^3$ an und zeigen Sie, dass das Assoziativgesetz der Multiplikation auch für allgemeine Quaternionen gilt.
- (b) Geben Sie das neutrale Element bezüglich der Multiplikation und das multiplikative Inverse einer beliebigen Quaternion an (Beweis!).
- (c) Berechnen Sie für zwei beliebige Quaternionen $x, y \in \mathbb{H}$ den Kommutator von x mit y , also $[x, y] := xy - yx$.

Allgemein kann man Quaternionen auffassen als bestehen aus einem reellen Anteil h^0 und einem komplexen Anteil (h^1, h^2, h^3) , den man mit einem Vektor $\mathbf{h} = (h^1, h^2, h^3)^{\text{tr}} \in \mathbb{R}^3$ identifizieren kann. Man benutze für $h \in \mathbb{H}$ die Notation $h = (h^0, \mathbf{h})$.

- (d) Drücken Sie das Produkt zweier allgemeiner Quaternionen (vgl. Teil (a)) in Form dieser beider Anteile h^0 und \mathbf{h} aus. Was passiert, wenn der Realteil von h verschwindet, also $h^0 = 0$ gilt? Solche $h \in \mathbb{H}$ nennt man reine Quaternionen.
- (e) Die sogenannten Einheitsquaternionen sind diejenigen $x \in \mathbb{H}$, für die gilt $x\bar{x} = 1$. Was bedeutet dies in Komponenten x^0, x^1, x^2, x^3 ausgedrückt? Überlegen Sie sich, was dies anschaulich heißt, welches geometrische Objekt wird durch die erhaltene Gleichung beschrieben?

- (f) Überlegen Sie sich, dass sich jede Einheitsquaternion $q \neq \pm 1$ eindeutig schreiben läßt als

$$q = \cos \phi + e \sin \phi,$$

wobei e eine reine Einheitsquaternion ist.

- (g) Sei $i_{\mathbb{C}}$ die imaginäre Einheit der komplexen Zahlen \mathbb{C} . Überlegen Sie sich, dass es einen Isomorphismus gibt, mit dessen Hilfe sich jede Quaternion als Linearkombination der sogenannten Paulimatrizen

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i_{\mathbb{C}} \\ i_{\mathbb{C}} & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

zusammen mit der Matrix $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ausdrücken läßt und geben Sie einen möglichen Isomorphismus explizit an.

- (h) Die reinen Quaternionen ($h^0 = 0$) lassen sich mit Vektoren im \mathbb{R}^3 identifizieren. Sei nun $x \in \mathbb{H}$ die mit dem Vektor $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$ identifizierte, reine Quaternion. Eine Drehung im \mathbb{R}^3 läßt sich nun darstellen als $D_q : x \mapsto qxq^{-1}$, der gedrehte Vektor $\mathbf{x}' \in \mathbb{R}^3$ entspricht also der reinen Quaternion $x' = qxq^{-1}$. Hierbei ist q eine Einheitsquaternion mit $q = \cos \frac{\alpha}{2} + e \sin \frac{\alpha}{2}$, wobei e die mit dem Vektor der Drehachse identifizierte, reine Einheitsquaternion sowie α der Drehwinkel ist. Weisen Sie explizit nach, dass für $e = (0, (1, 0, 0)^{\text{tr}})$ und einen beliebigen Drehwinkel α der gedrehte Vektor \mathbf{x}' tatsächlich durch $x' = qxq^{-1}$ gegeben ist.
- (i) Wieso erzeugen q und $-q$ die gleiche Drehung? Was bedeutet dies für die Verbindung der Einheitsquaternionen zur Drehgruppe?

Falls Korrektur erwünscht, geben Sie das Blatt bitte in der Übungsgruppe ab, zu der Sie angemeldet sind.

Übungsblätter und Informationen unter:

<http://www.mathematik.uni-muenchen.de/~bohmmech/Teaching/MP2SoSe2013/index.php>