MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT MÜNCHEN

SoSe 2013

Übungen zu Mathematik II für Physiker

Prof. Dr. D. Dürr

Blatt 9

Aufgabe 1: Zeigen Sie, dass das charakteristische Polynom einer Matrix basisunabhängig ist.

Aufgabe 2: Seien $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Bestimmen Sie die Eigenwerte und Eigenvektoren der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \alpha & \beta \end{pmatrix}$$

Für welche Wahl von α, β ist die Dimension eines der Eigenräume nicht gleich der algebraischen Vielfachheit des zugehörigen Eigenwertes?

Aufgabe 3: Sei

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Bestimmen Sie die Eigenwerte und Eigenräume von A. Ist A diagonalisierbar, gibt es also eine Basis von $\mathbb{R}^3$ in welcher A Diagonalgestalt hat? Sollte dies der Fall sein, geben Sie eine Matrix S an, sodass $S^{-1}AS$ diagonal ist und berechnen Sie $S^{-1}AS$ explizit.

Aufgabe 4: Sei U ein Untervektorraum eines euklidischen oder unitären Vektorraums V und P ein Projektor auf U.

(a) Welche Eigenwerte kann P haben?

(b) Zeigen Sie: Wenn P der orthogonale Projektor auf U ist, dann gilt $\mathrm{Kern}(P) = U^{\perp} = \{\boldsymbol{v} \in V \,|\, \forall \boldsymbol{u} \in U \text{ gilt } \langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \rangle = 0\}$.

(c) Nun sei $V = \mathbb{R}^2$ und $U = g$ eine Nullpunktsgerade. P projeziert jeden Vektor $\boldsymbol{x}$ aus $\mathbb{R}^2$ entlang einer Geradenschar (gegeben durch eine zweite Nullpunktsgerade h) auf g. Zeigen Sie, dass P genau dann selbstadjungiert (also ein orthogonaler Projektor) ist, wenn h senkrecht auf g steht. Zeichnen Sie die Situation!

Aufgabe 5: Die Gleichung

$$7x^2 + 2\sqrt{3}xy + 5y^2 = 8 \; x, y \in \mathbb{R} \tag{1}$$

beschreibt einen Kegelschnitt. Welchen? Zeichnen Sie den Kegelschnitt. Finden Sie die Hauptachsen des Kegelschnittes. Das bedeutet, finden Sie Koordinaten x', y' in denen die quadratische Form diagonal wird. Gleichbedeutend ist: Schreiben Sie den quadratischen Ausdruck (1) als $\boldsymbol{x}^{tr} T \boldsymbol{x}$ und finden Sie die Eigenbasis von T. Tragen Sie in Ihrer Zeichnung des Kegelschnitts das neue Koordinatensystem ein.

Falls Korrektur erwünscht, geben Sie das Blatt bitte in der Übungsgruppe ab, zu der Sie angemeldet sind.

Übungsblätter und Informationen unter:
http://www.mathematik.uni-muenchen.de/~bohmmech/Teaching/MP2SoSe2013/index.php