MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT MÜNCHEN SoSe 2013

Übungen zu Mathematik II für Physiker

Prof. Dr. D. Dürr

Blatt 8

Aufgabe 1:

(a) Sei V ein unitärer Vektorraum und $B = \{\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n\}$ eine ONB von V. Weiter bezeichne $x^i, i = 1, \ldots, n$ die Komponenten eines Vektors $\boldsymbol{x} \in V$ bezüglich der Basis B. Zeigen Sie:

$$\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle = \sum_{i=1}^{n} \bar{x}^i y^i$$

(b) Betrachten Sie nun den Vektorraum der komplexwertigen, stetigen Funktionen über dem Intervall $[0, 2\pi]$, $C([0, 2\pi], \mathbb{C})$. Zeigen Sie, dass die Vektoren $\boldsymbol{e}_n(x) = e^{inx}$, $n \in \mathbb{N}$ bezüglich des Skalarprodukts

$$\langle f, g \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \overline{f(x)} g(x) dx$$

ein Orthonormalsystem bilden, dass also

$$\langle e^{inx}, e^{imx} \rangle = \delta_{nm}.$$

Aufgabe 2: In der Vorlesung wurde das Gram-Schmidtsche Orthonormalisierungsverfahren besprochen.

(a) Zeigen Sie, dass die dabei errechneten Vektoren

$$\boldsymbol{v}_{k+1} = \frac{1}{N_{k+1}} \left(\boldsymbol{a}_{k+1} - \sum_{i=1}^{k} P_{\boldsymbol{v}_i}(\boldsymbol{a}_{k+1}) \right)$$

tatsächlich orthogonal und normiert sind.

(b) Wendet man das Gram-Schmidtsche Orthonormalisierungsverfahren auf die Folge der Monome $(1, x, x^2, \ldots)$ in $C([-1, 1])$ mit dem Skalarprodukt

$$\langle f, g \rangle = \int_{-1}^{1} f(x)\, g(x)\, dx$$

an, so erhält man die normierten Legendre-Polynome P_n, $n \in \mathbb{N}$. P_n ist ein Polynom n-ten Grades.

(i) Berechnen Sie mit diesem Verfahren P_0, P_1 und P_2 und skizzieren Sie die Polynome. Was bedeutet die Orthogonalität von P_0 und P_2 graphisch?

(ii) Bestimmen Sie die Koordinaten von $p(x) = 1 + x + x^2$ bezüglich dieser Orthonormalbasis.

Aufgabe 3:

Gegeben seien ein Vektorraum V und die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(t) = \|\boldsymbol{x} - t\boldsymbol{v}\|$ für feste $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{v} \in V$. Finden Sie ein Minimum von $f(t)$. Was bedeutet dies geometrisch?

Aufgabe 4: Sei $P_{\boldsymbol{v}}$ der orthogonale Projektor auf den Vektor $\boldsymbol{v} \in V$ (vgl. Vorlesung). Zeigen Sie:

$$P_{\boldsymbol{v}} \circ P_{\boldsymbol{v}} = P_{\boldsymbol{v}}.$$

Falls Korrektur erwünscht, geben Sie das Blatt bitte in der Übungsgruppe ab, zu der Sie angemeldet sind.

Übungsblätter und Informationen unter:
http://www.mathematik.uni-muenchen.de/~bohmmech/Teaching/MP2SoSe2013/index.php