

# Übungen zu Mathematik II für Physiker

Prof. Dr. D. Dürr

## Blatt 7

**Aufgabe 1:** Berechnen Sie die Determinante der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 3 & -3 \\ 3 & 2 & 2 & 4 \\ 4 & 0 & -4 & 1 \end{pmatrix}.$$

**Aufgabe 2:** Seien  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^3$  linear unabhängig. Sei  $\mathbf{x} \times \mathbf{y} := \sum_{i=1}^3 \mathbf{e}_i \det(\mathbf{e}_i, \mathbf{x}, \mathbf{y})$ .

Zeigen Sie:

- (a)  $\mathbf{x} \times \mathbf{y} = -\mathbf{y} \times \mathbf{x}$ .
- (b)  $\mathbf{x}, \mathbf{y}$  und  $\mathbf{x} \times \mathbf{y}$  sind linear unabhängig.
- (c) Fassen Sie die transponierten Vektoren  $\mathbf{x}^{\text{tr}}, \mathbf{y}^{\text{tr}} \in \mathbb{R}_3$  als Dualvektoren auf. Dann gilt

$$\mathbf{x} \times \mathbf{y} \in \text{Kern}(\alpha \mathbf{x}^{\text{tr}} + \beta \mathbf{y}^{\text{tr}}) \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

**Aufgabe 3:** Seien  $\mathbf{a}^*, \mathbf{b}^* \in \mathbb{R}_3$ , wobei  $\mathbb{R}_3$  den Dualraum zu  $\mathbb{R}^3$  bezeichne. Sei  $f \in \text{Alt}_2(\mathbb{R}^3)$  die Zweiform gegeben durch das äußere Produkt ("wedge-Produkt") von  $\mathbf{a}^*$  mit  $\mathbf{b}^*$ ,  $f = \mathbf{a}^* \wedge \mathbf{b}^*$ . Finden Sie denjenigen Vektor  $\mathbf{t} \in \mathbb{R}^3$  (bezüglich der kanonischen Einheitsbasis), für den gilt

$$\det(\mathbf{t}, \cdot, \cdot) = f(\cdot, \cdot).$$

**Aufgabe 4:** Sei  $\phi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  ein Isomorphismus. Seien weiter  $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c} \in \mathbb{R}^3$  linear unabhängige Vektoren. Wie verändert der Isomorphismus  $\phi$  das Volumen des von  $\mathbf{a}, \mathbf{b}$  und  $\mathbf{c}$  aufgespannten Parallelepipeds?

**Aufgabe 5:** Seien

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4.$$

Bestimmen Sie das Volumen des von diesen Vektoren aufgespannten Parallelepipeds im  $\mathbb{R}^4$ .

Falls Korrektur erwünscht, geben Sie das Blatt bitte in der Übungsgruppe ab, zu der Sie angemeldet sind.

Übungsblätter und Informationen unter:

<http://www.mathematik.uni-muenchen.de/~bohmmech/Teaching/MP2SoSe2013/index.php>