MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT MÜNCHEN SoSe 2013

Übungen zu Mathematik II für Physiker

Prof. Dr. D. Dürr

Blatt 6

Aufgabe 1:

Bestimmen Sie mit Hilfe des Gauß-Verfahrens den Rang der Matrix

$$\begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 & 7 \\ -3 & 0 & -1 & -4 \\ 4 & 1 & 2 & 7 \\ 6 & -3 & 0 & 3 \\ -4 & 5 & 2 & 3 \end{pmatrix} .$$

Aufgabe 2: Gegeben sei das folgende Gleichungssystem mit reellen Koeffizienten

$$\begin{aligned} x^1 - x^2 + x^3 - x^4 + x^5 &= b^1 \\ x^2 + x^3 + x^4 + x^5 &= b^2 \\ 2x^1 + x^2 + 2x^3 + 3x^4 &= b^3 \end{aligned}$$

(a) Bestimmen Sie mit Hilfe des Gauß-Verfahrens die Lösungsmenge L des inhomogenen Gleichungssystems für

$$\begin{pmatrix} b^1 \\ b^2 \\ b^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} .$$

(b) Geben Sie die Lösungsmenge L_0 des zugehörigen homogenen Gleichungssystems und eine spezielle Lösung des inhomogenen Gleichungssystems aus (a) an.

(c) Ist das Gleichungssystem für alle $\begin{pmatrix} b^1 \\ b^2 \\ b^3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ lösbar?

Aufgabe 3: Seien $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c} \in \mathbb{R}^3$.

(a) Unter welchen Bedingungen an die Koordinaten a^i, b^j, c^k $(i, j, k = 1, 2, 3)$ sind $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ und $\boldsymbol{c}$ linear unabhängig, d.h. wann hat das lineare Gleichungssystem

$$0 = \alpha\, \boldsymbol{a} + \beta\, \boldsymbol{b} + \gamma\, \boldsymbol{c}$$

genau eine Lösung?

(b) Verifizieren Sie, dass sich die Bedingung aus (a) als

$$\sum_{i,j,k=1}^{3} \varepsilon_{ijk} a^i b^j c^k \neq 0$$

schreiben lässt. Dabei ist

$$\varepsilon_{ijk} := \begin{cases} 1 & \text{falls } i = 1,\ j = 2,\ k = 3 \text{ oder eine gerade Permutation davon ist,} \\ -1 & \text{falls } i,\ j,\ k \text{ eine ungerade Permutation von } i = 1,\ j = 2,\ k = 3 \text{ ist,} \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Berechnen Sie (für $i = 1, 2, 3$) $\sum_{j,k=1}^{3} \epsilon_{ijk} b^j c^k$ und bringen Sie $\sum\limits_{i,j,k=1}^{3} \varepsilon_{ijk} a^i b^j c^k$ in Zusammenhang mit dem „Spatprodukt“.

Aufgabe 4:

Die Spur einer Matrix $A = (a^i_j) \in M(n \times n; K)$ ist gegeben durch

$$\operatorname{spur}(A) = \sum_{i=1}^{n} a^i_i\,.$$

(a) Zeigen Sie, $\operatorname{spur}(AC) = \operatorname{spur}(CA)$ für alle $A, C \in M(n \times n; K)$.

(b) Beweisen Sie, dass die Spur invariant unter Koordinatentransformationen ist, d.h. dass für eine beliebige Matrix A und beliebige Basen B, B' von K^n

$$\operatorname{spur}(T_{B'B} A T_{BB'}) = \operatorname{spur}(A)$$

gilt.

Falls Korrektur erwünscht, geben Sie das Blatt bitte in der Übungsgruppe ab, zu der Sie angemeldet sind.

Übungsblätter und Informationen unter:
http://www.mathematik.uni-muenchen.de/~bohmmech/Teaching/MP2SoSe2013/index.php