MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT MÜNCHEN

SoSe 2013

Übungen zu Mathematik II für Physiker

Prof. Dr. D. Dürr

Blatt 5

Aufgabe 1: Für $V = W = \mathbb{R}^2$ sei $\Phi \in \mathrm{Hom}(V, W)$ gegeben durch

$$\Phi\left(\begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} x^1 + 3x^2 \\ 3x^1 + x^2 \end{pmatrix} .$$

$B = \left\{ \boldsymbol{b}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \boldsymbol{b}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ und $B' = \left\{ \boldsymbol{b}'_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \boldsymbol{b}'_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$ sind Basen von $\mathbb{R}^2$ (B ist die kanonische Basis). Bestimmen Sie

(a) die Matrix $T_{BB'}(\mathrm{id})$ der Koordinatentransformation, die zum Basiswechsel $B' \to B$ gehört, und die Matrix $T_{B'B}(\mathrm{id})$ der Koordinatentransformation, die zum Basiswechsel $B \to B'$ gehört,

(b) die Koordinatendarstellung von Φ bezüglich

  (i) der Basen B von V und B von W,
  (ii) der Basen B' von V und B' von W,
  (iii) der Basen B' von V und B von W.

Aufgabe 2: Für alle $n \in \mathbb{N}$ ist $P_n = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid f \text{ ist ein Polynom vom Grad} \leq n\}$ mit den Verknüpfungen aus Aufgabe 1 von Blatt 2 ein $\mathbb{R}$-Vektorraum.

(a) Zeigen Sie, dass die Monome vom Grad $\leq n$ jeweils eine Basis von P_n bilden, d.h. $B_n := \{\boldsymbol{b}_0(t) = 1\,,\ \boldsymbol{b}_1(t) = t\,, \ldots,\ \boldsymbol{b}_n(t) = t^n\}$ ist eine Basis von P_n.

(b) Sei $\Phi \in \mathrm{Hom}(P_3, P_5)$ gegeben durch

$$\Phi(\boldsymbol{b}_0)(t) = t^2\,, \quad \Phi(\boldsymbol{b}_1)(t) = t^5 + 3t^2 - 1\,, \quad \Phi(\boldsymbol{b}_2)(t) = t^3 - t + 2\,, \quad \Phi(\boldsymbol{b}_3)(t) = t^4 - t^2\,.$$

Bestimmen Sie die Koordinatendarstellung $T_{B_5 B_3}(\Phi)$ von Φ bezüglich der Basen B_3 und B_5.

(c) Bestimmen Sie die Koordinatendarstellung $T_{B_{n-1}B_n}(\frac{d}{dt})$ bzw. $T_{B_{n+1}B_n}(\mathrm{int})$ bezüglich der Basen B_n und B_{n-1} bzw. B_{n+1} von

$$\frac{d}{dt} \in \mathrm{Hom}(P_n, P_{n-1})\,, \quad f \mapsto \frac{df}{dt}$$

bzw. von

$$\mathrm{int} \in \mathrm{Hom}(P_n, P_{n+1})\,, \quad f \mapsto \int_0^t f(s)ds\,.$$

Aufgabe 3:

Schreiben Sie die Matrix

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

als Summe von dyadischen Produkten (vergleiche Vorlesung).

Falls Korrektur erwünscht, geben Sie das Blatt bitte in der Übungsgruppe ab, zu der Sie angemeldet sind.

Übungsblätter und Informationen unter:
http://www.mathematik.uni-muenchen.de/~bohmmech/Teaching/MP2SoSe2013/index.php