MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT MÜNCHEN SoSe 2013

Übungen zu Mathematik II für Physiker

Prof. Dr. D. Dürr

Blatt 4

Aufgabe 1: Seien V und W endlichdimensionale K-Vektorräume mit $\dim V = n$ und $\dim W = m$. In der Vorlesung wurde bereits gezeigt, dass

$$\mathrm{Hom}(V, W) = span\{\Phi^l_k : l = 1, \ldots, n; k = 1, \ldots, m\}.$$

Erinnerung: $\Phi^l_k \in \mathrm{Hom}(V, W)$, $\Phi^l_k(\boldsymbol{a}_i) = \delta^l_i \boldsymbol{b}_k$, wobei $\{\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n\}$ Basis in V und $\{\boldsymbol{b}_1, \ldots, \boldsymbol{b}_m\}$ Basis in W ist.
Beweisen Sie, dass die Φ^l_k linear unabhängig sind und folgern Sie, dass diese eine Basis von $\mathrm{Hom}(V, W)$ bilden.

Aufgabe 2: Seien V ein dreidimensionaler und W ein zweidimensionaler K-Vektorraum. Bezeichne weiter $A = \{\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3\}$ eine Basis von V und $B = \{\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2\}$ eine Basis von W. Sei $\Phi \in \mathrm{Hom}(V, W)$ gegeben durch

$$\Phi(\boldsymbol{a}_1) = \boldsymbol{b}_1\,, \quad \Phi(\boldsymbol{a}_2) = 2\boldsymbol{b}_1 - \boldsymbol{b}_2\,, \quad \Phi(\boldsymbol{a}_3) = 3\boldsymbol{b}_2\,.$$

(a) Bestimmen Sie die Koordinatendarstellung von Φ bzgl. A und B .

(b) Sei $\boldsymbol{x} \in V$ mit $\Phi_A(\boldsymbol{x}) = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ gegeben und sei $\boldsymbol{y} = \Phi(\boldsymbol{x})$. Berechnen Sie $\Phi_B(\boldsymbol{y})$.

(c) Bestimmen Sie $\mathrm{Kern}(\Phi)$, $\mathrm{Bild}(\Phi)$ und $\mathrm{Rang}(\Phi)$.

Aufgabe 3: Seien V, W K-Vektorräume und $\Phi \in \mathrm{Hom}(V, W)$. Zeigen Sie:

(a) $\mathrm{Kern}(\Phi) = \{\boldsymbol{v} \in V \mid \Phi(\boldsymbol{v}) = 0\}$ und $\mathrm{Bild}(\Phi) = \Phi(V)$ sind Untervektorräume von V bzw. W.

(b) Φ ist genau dann injektiv, wenn $\mathrm{Kern}(\Phi) = \{0\}$ ist.

Falls Korrektur erwünscht, geben Sie das Blatt bitte in der Übungsgruppe ab, zu der Sie angemeldet sind.

Übungsblätter und Informationen unter:
http://www.mathematik.uni-muenchen.de/~bohmmech/Teaching/MP2SoSe2013/index.php