MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT MÜNCHEN SoSe 2013

Übungen zu Mathematik II für Physiker

Prof. Dr. D. Dürr

Blatt 3

Aufgabe 1:

(a) Sei $B = \left\{ \boldsymbol{b}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \boldsymbol{b}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \boldsymbol{b}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ eine Basis von $\mathbb{R}^3$. Finden Sie die Dualbasis $\{\boldsymbol{l}^1, \boldsymbol{l}^2, \boldsymbol{l}^3\}$ zu B im Raum der Linearformen, wobei der Raum der Linearformen durch $\mathbb{R}_3$ vertreten sei (mit der Zeile$\times$Spalte-Vorschrift, siehe Vorlesung). Berechnen Sie

$$\boldsymbol{l}^k \left(\begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ 5 \end{pmatrix} \right), \quad k = 1, 2, 3$$

und stellen Sie $\begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ 5 \end{pmatrix}$ in der Basis B dar.

(b) Sei $V := \{f : [-1, 1] \to \mathbb{R} \mid f \text{ ist ein Polynom vom Grad} \leq 3\}$ mit den Verknüpfungen aus Blatt 2 Aufgabe 1. Die ersten vier Legendre-Polynome

$$L_0(t) = 1\,, L_1(t) = t\,,\ L_2(t) = \frac{1}{2}(3t^2 - 1) \text{ und } L_3(t) = \frac{1}{2}(5t^3 - 3t)$$

bilden eine Basis dieses Vektorraums.

Für jedes $g \in V$ definiere man die lineare Abbildung

$$\langle g, \cdot \rangle : V \to \mathbb{R}, \quad f \mapsto \langle g, f \rangle = \int_{-1}^{1} g(t) f(t)\, dt\,.$$

Damit wird der Dualraum V^* von V durch V selbst vertreten ($g^*(f) = \int_{-1}^{1} g(t) f(t)\, dt$). Finden Sie mit dieser Vorschrift die zu $\{L_0, L_1, L_2, L_3\}$ duale Basis $\{L_0^*, L_1^*, L_2^*, L_3^*\}$ und überprüfen Sie mit Hilfe dieser Ihr Ergebnis aus Aufgabe 4 von Blatt 2 .

Aufgabe 2: Eine Teilmenge $U \subset V$ eines $K-$Vektorraums V heißt Untervektorraum wenn

(i) $0 \in U$,

(ii) für alle u, $v \in U$ und alle $\alpha \in K$ gilt: $u + v \in U$ und $\alpha u \in U$ („Abgeschlossenheit“).

Bemerkung: Man sieht leicht, dass jeder Untervektorraum $U \subset V$ selbst wieder ein Vektorraum ist (mit den Verknüpfungen $+$ und $\cdot$ von V).

Welche der folgenden Teilmengen des $\mathbb{R}^2$ bilden einen Untervektorraum?

(a) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 3x - 4y = 0\}$

(b) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 - y = 0\}$

U_1, U_2 seien Untervektorräume eines K-Vektorraums V. Beweisen oder widerlegen Sie:

(c) $U_1 \cap U_2$ ist ein Untervektorraum.

(d) $U_1 + U_2$ ist ein Untervektorraum.

(e) $U_1 \cup U_2$ ist ein Untervektorraum.

Aufgabe 3: U_1, U_2 seien endlichdimensionale Untervektorräume eines K-Vektorraums V. Zeigen Sie:

$$\dim(U_1 + U_2) = \dim U_1 + \dim U_2 - \dim(U_1 \cap U_2)\,.$$

Aufgabe 4: Sei $n \geq 2$. Welche der folgenden Abbildungen sind linear, welche injektiv und welche surjektiv?

(a) $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}\,, \quad f(\boldsymbol{x}) = \sum_{i=1}^{n} x^i\,,$

(b) $\boldsymbol{f} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2 \quad \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \begin{pmatrix} 2x^1 - x^3 \\ x^2 + 5 \end{pmatrix}\,,$

(c) $\boldsymbol{h} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^2 \quad \boldsymbol{h}(\boldsymbol{x}) = \begin{pmatrix} x^1 - x^n \\ x^1 + x^n \end{pmatrix}\,,$

(d) $k : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}\,, \quad k(\boldsymbol{x}) = (x^1)^2\,.$

Notation: $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x^1 \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix}\,.$

Aufgabe 5: Seien V, W und U K-Vektorräume und f ein Isomorphismus von V nach W.

(a) Sei g ein Isomorphismus von W nach U. Zeigen Sie, dass $g \circ f$ ein Isomorphismus von V nach U ist.

(b) Sei g ein Isomorphismus von V nach W. Bewiesen oder widerlegen Sie: $f + g$ ist ein Isomorphismus von V nach W.

(c) Zeigen Sie, daß f^{-1} ein Isomorphismus von W nach V ist.

Falls Korrektur erwünscht, geben Sie das Blatt bitte in der Übungsgruppe, zu der Sie angemeldet sind, ab.

Übungsblätter und Informationen unter:
http://www.mathematik.uni-muenchen.de/∼bohmmech/Teaching/MP2SoSe2013/index.php