MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT MÜNCHEN

SoSe 2013

Übungen zu Mathematik II für Physiker

Prof. Dr. D. Dürr

Blatt 2

Aufgabe 1:

(a) Man betrachte die Menge aller reeller Polynome $\mathbb{R}[t] = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid f \text{ ist ein Polynom}\}$ und definiere für alle $f\,, g \in \mathbb{R}[t]$ und alle $\alpha \in \mathbb{R}$

$$\begin{array}{ccl} f+g & \text{durch} & (f+g)(t) := f(t) + g(t) \quad \text{und} \\ \alpha f & \text{durch} & (\alpha f)(t) := \alpha f(t)\,. \end{array}$$

Zeigen Sie, dass $\mathbb{R}[t]$ mit diesen Verknüpfungen ein $\mathbb{R}$-Vektorraum ist.

(b) Man betrachte die Menge der Lösungen der Newtonschen Bewegungsgleichung für ein freies Punktteilchen $m\ddot{\boldsymbol{x}} = 0$, d.h. die Menge $\mathrm{L} = \{\boldsymbol{x} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3 \mid m\frac{d^2\boldsymbol{x}(t)}{d\,t^2} = 0 \text{ für alle } t \in \mathbb{R}\}$. Zeigen Sie, dass auch diese Menge mit den in (a) definierten Verknüpfungen ein $\mathbb{R}$-Vektorraum ist.

Aufgabe 2: Finden Sie drei linear abhängige Polynome $p_1\,, p_2\,, p_3 \in \mathbb{R}[t]$, von denen je zwei linear unabhängig sind.

Aufgabe 3: Seien $\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{c} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$.

(a) Zeigen Sie: $\boldsymbol{c} \in \operatorname{span}(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$ genau dann, wenn $\alpha + \beta = 0$.

(b) Zeigen Sie, dass $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ linear unabhängig sind und finden Sie einen Vektor $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3$, sodass $\operatorname{span}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = \mathbb{R}^3$.

Aufgabe 4:

$V := \{f : [-1,1] \to \mathbb{R} | f \text{ ist ein Polynom vom Grad} \leq 3\}$ ist mit den Verknüpfungen aus Aufgabe 1 ein Vektorraum. Die ersten vier Legendre-Polynome $L_0(t) = 1$, $L_1(t) = t$, $L_2(t) = \frac{1}{2}(3t^2 - 1)$ und $L_3(t) = \frac{1}{2}(5t^3 - 3t)$ bilden eine Basis dieses Vektorraums.
Stellen Sie

$$f : [-1,1] \to \mathbb{R}\,, \quad t \mapsto f(t) = 5t^3 - 6t^2 - 3t + 3$$

in dieser Basis dar.

Falls Korrektur erwünscht, geben Sie das Blatt bitte in der Übungsgruppe, zu der Sie angemeldet sind, ab.

Übungsblätter und Informationen unter:
http://www.mathematik.uni-muenchen.de/~bohmmech/Teaching/MP2SoSe2013/index.php