MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT MÜNCHEN

WS 2012/2013

Übungen zu Mathematik I für Physiker

Prof. Dr. D. Dürr

Blatt 9

Aufgabe 1: Eine Teilfolge einer Folge ist eine neue Folge, die entsteht wenn Folgenglieder der ursprünglichen Folge weggelassen werden.
Man zeige: Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge und $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ eine Teilfolge von $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, die gegen x konvergiert. Dann konvergiert $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen x.

Aufgabe 2: (a) Untersuchen Sie das Konvergenzverhalten der Reihe $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n ln(n)}$.
(b) Untersuchen Sie das Konvergenzverhalten der Reihe $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(ln(n))^\alpha}$ für $\alpha > 1$.

Aufgabe 3: Man berechne, falls existent:

$$\lim_{n\to\infty} \left(\sqrt{n+\sqrt{n}} - \sqrt{n}\right)$$
$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^n}{(n+q)^n} \text{ für } q \in \mathbb{R}.$$

Aufgabe 4: Zeige: $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$.
Hinweis: Es gibt zwei schnelle Lösungen: 1.) n durch $a_n := \sqrt[n]{n} - 1$ ausdrücken und geeignet abschätzen. Oder 2.) Verwenden Sie die Ungleichung zwischen arithmetischen und geometrischen Mitteln.

Aufgabe 5: Sei $x_n := (1 - \frac{1}{n^2})^n$. Man zeige, dass die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen 1 konvergiert.

Aufgabe 6: Welche der folgenden Reihen sind divergent, welche konvergent und welche absolut konvergent? Beweisen Sie Ihre Antworten.

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\frac{n+2}{3n+1})^2 \tag{1}$$
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}} \tag{2}$$
$$\sum_{n=1}^{\infty} (\frac{1}{n} - \frac{1}{n^2}) \tag{3}$$

Aufgabe 7: Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine konvergente Folge in $\mathbb{R}$ mit $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$. Zeigen Sie:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} x_k = x.$$

Hinweis: Betrachten Sie $\frac{1}{n} \sum\limits_{k=1}^{n} x_k - x$.