Übungen zu Mathematik I für Physiker

Prof. Dr. D. Dürr

Blatt 4

Aufgabe 1: Berechnen Sie 1/7 und 1/3 im binären Stellenwertsystem und addieren Sie beide Zahlen dort.

Aufgabe 2:

(a) Zeigen Sie (z.B. mit vollständiger Induktion), dass jede natürliche Zahl ungleich 1 in ein Produkt von Primzahlen zerlegt werden kann, d.h. in symbolischer Sprache, wenn P die Menge der Primzahlen bezeichnet

$$\forall\, n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}\ \exists k \in \mathbb{N} \ \text{ und } \exists p_1, \ldots, p_k \in P : n = p_1 \cdot p_2 \cdots p_k \,.$$

Dabei brauchen die $p_i,\ i = 1, ..., k$ nicht verschieden zu sein.

(b) Zeigen Sie, dass es keine größte Primzahl gibt. Hinweis: Betrachten Sie $1 \cdot 2 \cdots p + 1$ unter der Annahme, p sei die größte Primzahl.

Aufgabe 3: Zeigen Sie, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = 1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 = \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1)\,.$$

Aufgabe 4: Zeigen Sie die Bernoulli-Ungleichung: Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt für $x \geq -1$

$$(1+x)^n \geq 1 + nx\,.$$

Aufgabe 5: Das Pascalsche Dreieck.

$$\begin{array}{llllll}
1 & & & & & \\
1 & 1 & & & & \\
1 & 2 & 1 & & & \\
1 & 3 & 3 & 1 & & \\
1 & 4 & 6 & 4 & 1 & \\
1 & 5 & 10 & 10 & 5 & 1 \\
\vdots & & & & & & \ddots
\end{array}$$

Wir nummerieren die Zeilen und Spalten mit 0 beginnend und bezeichnen den Eintrag in der n-ten Zeile und k-ten Spalte ($k \leq n$) mit $b_{n,k}$. Das Pascalsche Dreieck ist nach folgender Rekursions-Vorschrift konstruiert:

$$b_{0,0} = b_{1,1} = b_{1,0} = 1 \quad \text{und}$$

$$b_{n+1,k} = \begin{cases} 1, & \text{wenn } k = 0 \\ b_{n,k-1} + b_{n,k}, & \text{wenn } 1 \leq k \leq n \\ 1, & \text{wenn } k = n+1. \end{cases}$$

Man zeige durch vollständige Induktion nach n:

$$b_{n,k} = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \quad \text{für } 0 \leq k \leq n \ .$$

Aufgabe 6:

Es seien $x, y \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{N}$:

(a) Multiplizieren Sie $(x+y)^2$ und $(x+y)^3$ aus und vergleichen Sie die Koeffizienten von $x^{n-k}y^k$ mit dem Pascal-Dreieck.

(b) Beweisen Sie mittels vollständiger Induktion die Binomische Formel

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} y^k = \binom{n}{0} x^n y^0 + \binom{n}{1} x^{n-1} y^1 + \ldots + \binom{n}{n} x^0 y^n \, .$$

(c) Beweisen Sie

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n \, .$$