Übungen zur Mathematik I für Physiker

Prof. Dr. D. Dürr

Blatt 3

Aufgabe 1:
a) Beweisen Sie: Für $1 \neq q \in \mathbb{R}$ und für alle $n \in \mathbb{N}_0$ gilt:

$$\sum_{k=0}^{n} q^k = 1 + q + q^2 + \cdots + q^n = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$$

b) In einer späteren Aufgabe beweisen wir die Bernoulli-Ungleichung: Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt für $x \geq -1$

$$(1+x)^n \geq 1 + nx.$$

Im Folgenden sei $0 < q < 1$. Zeigen Sie nun unter Annahme der Bernoulli-Ungleichung: Für alle $\epsilon > 0$ existiert ein $N \in \mathbb{N}$, so dass für alle $n \geq N$ gilt: $q^n \leq \epsilon$.

Beweisen Sie damit dann im zweiten Schritt: Für alle $\epsilon > 0$ existiert ein $N \in \mathbb{N}$, so dass

$$|\sum_{k=0}^{n} q^k - \frac{1}{1-q}| < \epsilon \quad \forall n \geq N.$$

.

Aufgabe 2:
Neben der Iteration, die man aus der Wechselwegnahme von Diagonale und Seite des Quadrates bekommt, gibt es noch weitere Verfahren zur Bestimmung von $\sqrt{2}$:
Sei (x_n) eine Folge, "die gegen $\sqrt{2}$ geht". Für große n ist dann $x_n \approx x_{n+1}$, also $(x_n - x_{n+1})^2 \approx 0$. Ausquadrieren und die Setzung $x_{n+1}^2 = 2$ führt auf die Rekursion

$$x_{n+1} := \frac{1}{2}x_n + \frac{1}{x_n}\,.$$

Zeigen Sie, daß diese Rekursion genauso gut wie die aus der Wechselwegnahme ist: Geben Sie die Konvergenzgeschwindigkeit dieser Rekursion in Abhängigkeit von $x_0 > 0$ an, d.h. schätzen Sie $|x_n - \sqrt{2}|$ ab. Anleitung: Zeigen Sie (1) $(x_{n+1} - x_n)^2 = x_{n+1}^2 - 2$ für $n \in \mathbb{N}_0$. Folgern Sie (2) $x_n/2 \geq 1/x_n$ für $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie damit, daß $(x_n)_{n\geq 1}$ eine monoton fallende Folge ist, und weiter, dass

$$|x_{n+1} - \sqrt{2}| \leq \frac{(\frac{1}{x_0} - \frac{x_0}{2})^2}{4^n 2\sqrt{2}}\,.$$

Berechnen Sie mit dieser Folge $\sqrt{2}$ auf 3 Dezimalen genau.