MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT MÜNCHEN

WS 2012/2013

Übungen zu Mathematik I für Physiker

Prof. Dr. D. Dürr

Blatt 12

Aufgabe 1: Sei $f : [a, b] \to [c, d]$ stetig und bijektiv. Zeigen Sie, dass $f^{-1} : [c, d] \to [a, b]$ $(f^{-1}(f(x)) = x)$ stetig in $[c, d]$ ist.

Hinweis: Sei $y \in [c, d]$ und $(y_n)_n \in [c, d]$ mit $\lim_{n\to\infty} y_n = y$. Sei dazu $f^{-1}(y) = x$ und $f^{-1}(y_n) =: x_n$. Dann ist zu zeigen, dass $\lim_{n\to\infty} x_n = x$. Begründen Sie das.
Zeigen Sie: 1.) Die Folge (x_n) hat mindestens einen Häufungspunkt $\bar{x}$.
2.) Folgern Sie $\bar{x} = x$ (Denken Sie an Teilfolgen.)

Aufgabe 2: Zeigen Sie mit der $\epsilon - \delta$ Version der Stetigkeit, dass $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$ stetig ist. Ist f auch gleichmäßig stetig? Begründen Sie Ihre Antwort.

Aufgabe 3: Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig. Zeigen Sie: f ist beschränkt, d.h. $\exists C < \infty$, so dass $f(x) < C \,\forall\, x \in [a, b]$.

Aufgabe 4: a) Man zeige, dass die Funktion

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x}} & \text{für } x > 0 \\ 0 & \text{für } x \leq 0 \end{cases}$$

stetig differenzierbar ist und man skizziere den Graphen. (Die Funktion ist unendlich oft differenzierbar, wie man sich leicht überlegt, wenn man die einmalige Differenzierbarkeit verstanden hat.)

b) Zeigen Sie, dass

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin(\frac{1}{x}) & \text{für } x \neq 0 \\ 0 & \text{für } x = 0 \end{cases}$$

überall differenzierbar ist, aber die Ableitungsfunktion unstetig ist.