Übungen zu Mathematik I für Physiker

Prof. Dr. D. Dürr

Blatt 10

Aufgabe 1:

1. Für eine Folge reeller Zahlen $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sind der Limes superior und der Limes inferior definiert als

$$\limsup_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} \left(\sup\{x_k : k \geq n\}\right)$$
$$\liminf_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} \left(\inf\{x_k : k \geq n\}\right)$$

Machen Sie sich klar, dass dies der größte, beziehungsweise kleinste Häufungspunkt der Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sind (oder falls diese nicht existieren $\pm\infty$). Was bedeutet dies für fast alle Folgenglieder x_n ?

2. Berechnen Sie für die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \dots$$

die Werte

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n},\ \limsup_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n},\ \liminf_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n},\ \text{ und } \ \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n}\,.$$

Konvergiert $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$? Beweisen Sie Ihre Antwort.

Aufgabe 2: Bestimmen Sie die Konvergenzradien der folgenden Reihen

(a) $\sum_{k=0}^{\infty} k \frac{x^{k-1}}{k!}$

(b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$

(c) $\sum_{n=0}^{\infty} n\, x^n$

(d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{2n^2}$

(e) $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{4^k} x^{2k}$

Aufgabe 3:

Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}; x \mapsto \frac{1}{1+x^2}$.

Für welche $x \in \mathbb{R}$ können Sie $f(x)$ als Potenzreihe in der Form $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ schreiben? Geben Sie diese Potenzreihe explizit an.

Aufgabe 4: Die Leibniz-Reihe ist definiert als

$$S = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}.$$

Zeigen Sie, dass diese Reihe konvergent ist und beweisen Sie $S = \frac{\pi}{4}$.

Wir wünschen Ihnen frohe Festtage und einen guten Start ins neue Jahr!