

# Übungen zu Mathematik I für Physiker

Prof. Dr. D. Dürr

## Blatt 8

### Aufgabe 1:

- (a) Zeigen Sie, dass die Menge der komplexen Zahlen  $\mathbb{C} = \{x + iy \mid x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}\}$  ein Körper ist. Dabei ist  $i^2 = -1$ . Man kann diesen Körper auch als  $\mathbb{R}^2$  mit  $(x, y) + (x', y') := (x + x', y + y')$  und  $(x, y) \cdot (x', y') := (xx' - yy', xy' + x'y)$  auffassen.
- (b) Kann man  $\mathbb{C}$  anordnen? Begründen Sie Ihre Aussage.

### Aufgabe 2:

- (a) Geben Sie die Eulerform von  $3 + 2i$  an. (Polardarstellung)
- (b) Geben Sie  $2e^{\pi i/4}$  in der Form  $a + bi$  an
- (c) Berechnen Sie  $|3e^{0,3\pi i} + 2e^{-1,6\pi i}|$ .
- (d) Finden Sie die dritten Wurzeln der Zahl  $w = 3 + 4i$ .
- (e) Berechnen Sie den Real- und Imaginärteil:

$$\frac{-2 + 7i}{5 + 2i}, \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{3}i\right)^6.$$

- (f) Man finde alle (komplexen) Nullstellen des Polynoms  $x^3 + 2x^2 + 3x - 6$

**Aufgabe 3:** Man zeige mit Induktion: Sei  $P_n(z)$  ein Polynom n-ten Grades über den komplexen Zahlen.

$$P_n(z) = a_n \prod_{k=1}^n (z - \delta_k)$$

Hinweis: Hauptsatz der Algebra: Sei  $P_n$  Polynom n-ten Grades über  $\mathbb{C}$  und  $n \geq 1 \Rightarrow \exists$  mindestens eine Nullstelle  $\delta$  von  $P_n$ .

**Aufgabe 4:** Man charakterisiere geometrisch (Skizze) diejenigen  $z \in \mathbb{C}$ , für die gilt:

$$|z - 2| + |z + 2| = 5 \tag{1}$$

$$0 < \operatorname{Re}(iz) < 1 \tag{2}$$

**Aufgabe 5:** Für welche  $z \in \mathbb{C}$  ist  $e^{z^2}$  reell?

**Aufgabe 6:**

(a) Bestimmen Sie, falls vorhanden, Infimum und Supremum der folgenden Mengen:

$$M_1 = \left\{ 1 - \frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N} \right\}, M_2 = \left\{ 2^{-n} \mid n \in \mathbb{N} \right\}, M_3 = \left\{ \sin x \mid x \in \mathbb{R} \right\}, M_4 = \left\{ \frac{1}{x} \mid x > 0 \right\}.$$

(b) Sei  $A$  eine nichtleere Teilmenge von  $\mathbb{R}$ . Sei  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine konvergente, monoton fallende Folge oberer Schranken von  $A$ . Sei  $x := \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ .

Zeigen Sie:  $x_n \geq x$  und  $x$  ist obere Schranke von  $A$ .