Übungen zu Mathematik I für Physiker

Prof. Dr. D. Dürr

Blatt 7

Aufgabe 1: In einem angeordneten Körper M kann ein Betrag definiert werden: $\forall x \in M$ sei

$$|x| = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$$

Man zeige:

1. $|x| = |-x|$
2. $\forall x, y \in M, |xy| = |x||y|$
3. die Dreiecksungleichung: $\forall x, y \in M$ gilt $|x + y| \leq |x| + |y|$
4. $\forall x, y \in M$ gilt $|x| - |y| \leq |x + y|$

Aufgabe 2: Sei M ein Körper. Man zeige, dass das Inverse bezüglich der Multiplikation eindeutig ist.

Aufgabe 3: Zeigen Sie: jede konvergente Folge ist auch eine Cauchy-Folge.

Aufgabe 4: Gegeben seien die Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit

(a) $a_n := \frac{(n+1)(3n^2-n)}{(2n-5)^5}, n \in \mathbb{N}$. Beweisen Sie, dass $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent ist.

(b) $a_n := \frac{n^2-1}{n^4+2n^3-2n-1}, n \in \mathbb{N}\backslash\{1\}$. Beweisen Sie, dass $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge ist.

(c) $a_n = \sqrt{n} - \sqrt{n-1},\ n \in \mathbb{N}$. Ist diese Folge konvergent und wenn ja, wogegen konvergiert sie?

Begründen Sie jeweils Ihre Aussagen.

Aufgabe 5: Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine konvergente Zahlen-Folge mit $x_n > 0,\ \forall n$. Zeigen Sie

$$\lim_{n\to\infty} x_n \geq 0\,.$$

Gilt auch die schärfere Aussage

$$\lim_{n\to\infty} x_n > 0\,?$$