MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT MÜNCHEN

WS 2012/2013

Übungen zu Mathematik I für Physiker

Prof. Dr. D. Dürr

Blatt 6

Aufgabe 1:
Es seien X, Y, Z Mengen und $f : X \to Y$ und $g : Y \to Z$ Abbildungen. Zeigen Sie:
Für $g \circ f : X \to Z;\ x \mapsto g(f(x))$ gilt:

(a) f, g injektiv $\Rightarrow g \circ f$ injektiv.

(b) f, g surjektiv $\Rightarrow g \circ f$ surjektiv.

(c) $g \circ f$ injektiv $\Rightarrow f$ injektiv.

(d) $g \circ f$ surjektiv $\Rightarrow g$ surjektiv.

Aufgabe 2:

Welche der folgenden Abbildungen sind injektiv? Welche sind surjektiv, welche bijektiv? Beweisen Sie Ihre Aussage.

(a)
$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \qquad f(x) = x^3$$

(b)
$$f : \mathbb{R}\backslash 0 \to \mathbb{R} \qquad f(x) = \frac{1}{x}$$

(c)
$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \qquad f(x) = \sin x$$

(d) Untersuchen Sie nun auf die obigen Eigenschaften in Abhängigkeit verschiedener Intervallgrenzen $a, b, c, d \in \mathbb{R}$

$$f : [a, b] \to [c, d] \qquad f(x) = \cos x$$

Aufgabe 3:

(a) Beweisen oder widerlegen Sie die folgende Aussage: Sei $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Familie von abzählbaren Mengen. Dann ist das unendliche kartesische Produkt

$$M = \times_{n\in\mathbb{N}} M_n$$

abzählbar.
Anmerkung: Man widerlegt Aussagen z.B. durch Auffinden eines Gegenbeispiels.

(b) Die Menge der rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$ ist abzählbar, d.h. es existiert eine Bijektion $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Q}$, $f(k) \mapsto q_k$. Zeigen Sie: Es gibt keine Abzählung, die die rationalen Zahlen der Größe nach ordnet $f(k) \leq f(k+1) \forall k \in \mathbb{N}$.

Aufgabe 4:
Es bezeichne X alle n-Tupel (oder Anordnungen) der n Elemente einer Menge M. Eine n-stellige Permutation ist eine bijektive Abbildung der Menge X auf sich selbst. $\sigma : X \to X$.

(a) Zeigen Sie, dass die Permutationen eine Gruppe bilden. Hierbei ist die Komposition von Permutationen die Gruppenverknüpfung.

(b) Ist die Permutationsgruppe kommutativ?