MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT MÜNCHEN

WS 2018/2019

Übungen zur Mathematik I für Physiker

Prof. Dr. D.-A. Deckert

Blatt 1

Die Aufgaben, neben denen "Zur Abgabe" steht, sollen in Dreiergruppen gelöst und mithilfe des UniWorX bis Freitag, 26.10., 14:00 Uhr abgegeben werden. ***Nur*** *diese Aufgaben werden korrigiert.*

Aufgabe 1: (*Zur Abgabe*)

1. Seien A, B und C Aussagen, beweisen Sie
   (a) $\neg(\neg A \vee \neg B) \iff A \wedge B$
   (b) $A \vee (B \wedge C) \iff (A \vee B) \wedge (A \vee C)$

2. Begründen Sie, warum die Implikation $A \Rightarrow B$ nur dann falsch sein soll, wenn A wahr und B falsch ist. Betrachten Sie dafür das folgende Beispiel: $A(x) := x > 5$, $B(x) := x > 2$. Wie muss die Wahrheitstabelle von der Implikation ($\Rightarrow$) aussehen, damit $\forall x \in \mathbb{Z}\ A(x) \Rightarrow B(x)$ wahr und $\forall x \in \mathbb{Z}\ B(x) \Rightarrow A(x)$ falsch ist?

Aufgabe 2: (*Zur Abgabe*)

Seien A, B, C Mengen. Beweisen Sie, dass folgende Aussagen wahr sind

1. $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
2. $(A^c \cup B^c)^c = A \cap B$

Aufgabe 3:

1. Finden Sie die Negation der Aussage "Everybody loves somebody". Schreiben Sie diese Aussage und die Negation mithilfe von Quantoren (in einer mathematisch präzisen Form).

2. Beweisen Sie, dass für $n \in \mathbb{Z}$ gilt ($n^2 - 6n + 5$ ist gerade) $\Rightarrow$ (n ist ungerade), indem Sie die Kontraposition $(A \Rightarrow B) \Rightarrow (\neg B \Rightarrow \neg A)$ ausnutzen.

3. Beweisen Sie, dass die Menge der Primzahlen unendlich viele Elemente enthält.

Aufgabe 4: Gegeben sei die Menge M. Man nennt die Teilmenge R des kartesischen Produkts $M \times M$ Äquivalenzrelation, falls sie folgende drei Eigenschaften hat

1. (Reflexivität) $\forall x \in M \ \ (x,x) \in R$
2. (Symmetrie) $\forall x, y \in M \ \ (x,y) \in R \Rightarrow (y,x) \in R$
3. (Transitivität) $\forall x, y, z \in M \ \ (x,y) \in R \wedge (y,z) \in R \Rightarrow (x,z) \in R$

Man benutzt Äquivalenzrelationen, um Elemente einer Menge miteinander zu identifizieren. Für Elemente $m, n \in M$ schreibt man oft mRn oder $m \stackrel{R}{=} n$ und meint damit $(m,n) \in R$. Des Weiteren definiert man für alle $m \in M$ die Äquivalenzklasse $[m]_R := \{n \in M |\, n \stackrel{R}{=} m\}$ und den Quotientenraum $M/\underset{=}{R} := \{[m]_R |\, m \in M\}$.

Sei $N = \{1, 2, ..., n\}$ für ein $n \in \mathbb{N}$. Wir schreiben $N^2 \equiv N \times N$. Zeigen sie, dass die Mengen R, S, T Äquivalenzrelationen sind

1. $R := \{(n,m) \in N^2 |\, n = m\}$
2. $S := \{((n,m),(p,q)) \in N^2 \times N^2 |\, (n = p \wedge m = q) \vee (n = q \wedge m = p)\}$
3. $T := \{((n,m),(p,q)) \in \mathbb{N}^2 \times \mathbb{N}^2 |\, nq = mp\}$

Wie viele Elemente hat $[x]_S$ für Elemente $x \in N^2$?
Wie viele Elemente hat $N^2/\underset{=}{S}$?

Aufgabe 5: Welche von den folgenden Aussagen sind wahr?

1. $\varnothing \subset \{1,2\}$ 2. $\varnothing \in \{1\}$ 3. $\varnothing \in \{\varnothing\}$ 4. $\{\varnothing\} \subset \varnothing$ 5. $\{\varnothing\} \subset \{\varnothing, \{\varnothing\}\}$

Aufgabe 6: Ist der älteste Physiker unter den Mathematikern und der älteste Mathematiker unter den Physikern dieselbe Person oder nicht unbedingt?