MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT MÜNCHEN WS 2018/2019

Übungen zur Mathematik I für Physiker

Prof. Dr. D.-A. Deckert

Blatt 9

Die Aufgaben, neben denen "Zur Abgabe" steht, können in ***Dreier- oder Vierergruppen*** *gelöst und mithilfe von UniWorX bis Freitag, 21.12., 14:00 Uhr abgegeben werden.* ***Nur*** *diese Aufgaben werden korrigiert.*

Aufgabe 1: (*Zur Abgabe*)

1. Geben Sie Ihre „Lieblingsfolge" $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ an, die beschränkt ist und mindestens drei unterschiedliche Häufungspunkte besitzt, d. h., mindestens drei konvergente Teilfolgen hat. Skizzieren Sie diese Folge in einem interessanten Bereich. Beschriften Sie die Teilfolgen $\left(\underline{a_k}\right) := \inf\{a_n | n \geq k\}$ sowie $(\overline{a_k}) := \sup\{a_n | n \geq k\}$ für $k \in \mathbb{N}$. Tragen Sie außerdem $\limsup\limits_{n\to\infty} a_n$ sowie $\liminf\limits_{n\to\infty} a_n$ in Ihre Skizze ein.

2. Sei nun $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine allgemeine Folge in $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ und sei $b \in \mathbb{R}$. Beweisen Sie:

   (a) $(\overline{a_k})_{k\in\mathbb{N}}$ ist monoton fallend und $\left(\underline{a_k}\right)_{k\in\mathbb{N}}$ ist monoton steigend.

   (b) $\limsup\limits_{n\to\infty} a_n \geq \liminf\limits_{n\to\infty} a_n$

   (c) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = b \Leftrightarrow \limsup\limits_{n\to\infty} a_n = b = \liminf\limits_{n\to\infty} a_n$

Aufgabe 2: *(Zur Abgabe)*
Sei $(a_{kn})_{k,n\in\mathbb{N}}$ eine Doppelfolge in $(\mathbb{C}, \|\cdot\|)$. Zeigen Sie ganz elementar mithilfe der Definitionen der Konvergenzmodi bei Doppelfolgen, dass, falls alle vorkommenden Limiten existieren und mindestens eine Konvergenz gleichmässig ist, gilt:

$$\lim_{n\to\infty}\lim_{k\to\infty} a_{kn} = \lim_{k\to\infty}\lim_{n\to\infty} a_{kn}$$

Hinweis: Bitte beweisen Sie dies, ohne auf die Rechenregeln für Limiten zurückzugreifen.

Aufgabe 3: Zeigen Sie, dass die Intervalle (a, b) bzw. $[a, b]$ in $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ tatsächlich nach der allgemeinen Definition für metrische Räume aus der Vorlesung offene bzw. abgeschlossene Mengen sind.

Aufgabe 4: Sei (M, d) ein metrischer Raum, I eine beliebige nicht-leere Menge, $U_\varepsilon(x)$ die durch die Metrik d bestimmte ε-Umgebung von $x \in M$ für $\varepsilon > 0$ sowie $A_i \subset M, i \in I$, offene Mengen bzgl. der Metrik d.

1. Zeigen Sie, dass $\forall \varepsilon > 0 \; \forall x \in M \; U_\varepsilon(x)$ offen ist.
2. Zeigen Sie, dass $\cup_{i \in I} A_i$ offen ist.
3. Widerlegen Sie mithilfe eines Gegenbeispiels, dass $\cap_{i \in I} A_i$ im Allgemeinen offen ist.

Aufgabe 5: Sei M eine nicht-leere Menge, d und d' Metriken auf M. Sei (M, d) darüber hinaus vollständig bzgl. der Metrik d. Seien außerdem d und d' äquivalent auf M, d. h., $\exists \alpha, \beta \in \mathbb{R}^+ \; \forall x, y \in M : \alpha d(x, y) \leq d'(x, y) \leq \beta d(x, y)$.
Zeigen Sie, dass jede Cauchy-Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in (M, d) auch in (M, d') konvergiert, d. h., dass (M, d') ebenfalls vollständig ist. Zeigen Sie weiterhin, dass der Grenzwert in diesem Fall unabhängig davon ist, ob (M, d) oder (M, d') betrachtet wird.

Aufgabe 6: Sei $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine beschränkte Folge in $(\mathbb{C}, \|\cdot\|)$, d. h., $\exists c \in \mathbb{R}_0^+ \; \forall n \in \mathbb{N} : \|z_n\| \leq c$. Zeigen Sie, dass mindestens eine konvergente Teilfolge $(z_m)_{m \in \mathbb{N}}$ von z_n existiert.
Hinweis: Betrachten Sie die Folgen von Real- und Imaginärteil a_n bzw. b_n definiert durch $z_n = (a_n, b_n)$. Zeigen sie, dass diese ebenfalls beschränkt sind. Wählen Sie geschickt Testfolgen a_{n_k} und b_{n_k}, sodass $z_{n_k} := (a_{n_k}, b_{n_k})$ eine konvergente Teilfolge von z_n ist. Verwenden Sie hierzu den Satz von Bolzano-Weierstraß für reele Folgen aus der Vorlesung.