MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT MÜNCHEN

WS 2018/2019

Übungen zur Mathematik I für Physiker

Prof. Dr. D.-A. Deckert

Blatt 8

Die Aufgaben, neben denen "Zur Abgabe" steht, können in ***Dreier- oder Vierergruppen*** *gelöst und mithilfe von UniWorX bis Freitag, 14.12., 14:00 Uhr abgegeben werden.* ***Nur*** *diese Aufgaben werden korrigiert.*

Aufgabe 1: (*Zur Abgabe*)
Berechnen Sie, falls möglich:

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!}$ 2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}$ 3. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n(n^2+1)}}$ 4. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$ 5. $\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{n^{\frac{k}{n}}}{k!}$

Beweisen Sie Ihre Antworten.

Aufgabe 2: (*Zur Abgabe*)
Sei $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ monoton wachsende oder fallende Folge der rationalen Zahlen und $\lim_{n\to\infty} p_n = \pm\infty$. Zeigen Sie, dass $\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{p_n}\right)^{p_n} = e$.

Aufgabe 3: Gegeben ist die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, die

a) konvergiert b) absolut konvergiert.

Welche Aussagen kann man über die Konvergenz der Reihen $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ und $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^3$ treffen?

Aufgabe 4: Sei $B_n = \sum_{k=1}^{n} b_k$

1. Beweisen Sie die Identität

$$\sum_{i=1}^{m} a_i b_i = a_m B_m - \sum_{i=1}^{m-1} (a_{i+1} - a_i) B_i \, .$$

2. Nutzen Sie die soeben bewiesene Identität, um das folgende Kriterium zu beweisen:

   (Das Abelsche Kriterium) Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ monoton fallende oder monoton wachsende beschränkte Folge und die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ konvergiert. Dann konvergiert die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k b_k$.

3. Beweisen Sie das Kriterium von Dirichlet:

   Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ monoton fallende Folge, die gegen Null konvergiert und $B_n = \sum_{k=1}^{n} b_k$ – beschränkte Folge. Dann konvergiert die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k b_k$.

Aufgabe 5: Berechnen Sie das Supremum sowie das Infimum folgender Mengen:

1. $A := \left\{1 - \frac{1}{n} \middle| n \in \mathbb{N}\right\}$
2. $B := \left\{\frac{1}{x} \middle| x \in \mathbb{R}, x > 0\right\}$
3. $C := \{n^3 2^{-n} | n \in \mathbb{N}\}$

Welche dieser Mengen besitzen ein Minimum bzw. ein Maximum? Beweisen Sie Ihre Antworten.

Aufgabe 6: Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ monoton wachsende Folge. Zeigen Sie, dass (in $\mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \sup\{a_n, n \in \mathbb{N}\}$ gilt.