MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT MÜNCHEN

WS 2018/2019

Übungen zur Mathematik I für Physiker

Prof. Dr. D.-A. Deckert

Blatt 7

Die Aufgaben, neben denen "Zur Abgabe" steht, können in ***Dreier- oder Vierergruppen*** *gelöst und mithilfe von UniWorX bis Freitag, 07.12., 14:00 Uhr abgegeben werden.* ***Nur*** *diese Aufgaben werden korrigiert.*

Aufgabe 1: (*Zur Abgabe*)
Nutzen Sie die Cauchy-Vollständigkeit der reelen Zahlen, um zu beweisen, dass die folgenden Folgen konvergieren:

1. $x_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{\cos k}{(2k-1)(2k+1)}$, $n \in \mathbb{N}$
2. $y_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{\cos(k-1) - \cos k}{k+1}$, $n \in \mathbb{N}$

Hinweis: Benutzen Sie, dass $\cos(\mathbb{R}) = [-1, 1]$ gilt. Außerdem könnte Aufgabe 5, Blatt 6, hilfreich sein.

Aufgabe 2: (*Zur Abgabe*)
Berechnen Sie die Grenzwerte und beweisen Sie Ihre Ergebnisse:

1. $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{n+3} - \sqrt{n+1}$
2. $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{q} \quad , q \in \mathbb{R}, q > 0$

Hinweis: Unterscheiden Sie die Fälle $q < 1$ und $q \geq 1$. Verwenden Sie, dass $\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} : q < (1+\varepsilon)^N$ für alle $q \in \mathbb{R}$ gilt. Für den Fall $q < 1$ können Sie $\sqrt[n]{\frac{1}{q}}$ betrachten.

Aufgabe 3: Berechnen Sie die Grenzwerte ($q \in \mathbb{R}$) und beweisen Sie Ihre Ergebnisse:

1. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n!}{n^n}$
2. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{q^n}{n!}$
3. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^k}{q^n} \quad , q > 1, k \in \mathbb{N}$
4. $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n}$

Hinweis: Beweisen Sie für 1), 2) und 3) mithilfe des Monotoniekriteriums, dass die Folgen konvergieren. Betrachten Sie danach die Differenz zweier direkt aufeinander folgender Glieder und nehmen Sie den Grenzwert von beiden Seiten. Nutzen Sie für 4) das Ergebnis von 3) für $k = 1$.

Aufgabe 4: Sei $x_{n+1} = \sqrt[3]{6 + x_n}$, $x_1 = \sqrt[3]{6}$. Beweisen Sie, dass $\lim_{n\to\infty} x_n = 2$.

Aufgabe 5: Beweisen Sie das Wurzelkriterium:
Sei $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ eine Reihe und $\exists q, 0 \leq q < 1 : \exists N \in \mathbb{N} \forall n \geq N \ \sqrt[n]{|a_n|} < q$, dann konvergiert die Reihe absolut.

Aufgabe 6: Nutzen Sie das Majoranten-, das Quotienten- und das Wurzelkriterium sowie das Kriterium für alternierende Reihen, um zu bestimmen, ob die folgenden Reihen konvergieren:

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{x}{n}\right)^n$, $x \in \mathbb{R}, x > 0$
2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^k}$ für $k \in \mathbb{N}$
3. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^8}{3^n}$
4. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{\sqrt{n}}$