MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT MÜNCHEN

WS 2018/2019

Übungen zur Mathematik I für Physiker

Prof. Dr. D.-A. Deckert

Blatt 6

Die Aufgaben, neben denen "Zur Abgabe" steht, können in ***Dreier- oder Vierergruppen*** *gelöst und mithilfe von UniWorX bis Freitag, 30.11., 14:00 Uhr abgegeben werden.* ***Nur*** *diese Aufgaben werden korrigiert.*

Aufgabe 1: (*Zur Abgabe*)
Untersuchen Sie folgende Folgen auf Konvergenz in $\mathbb{R}$.

1. $b_n := \frac{(n+1)(3n^2-n)}{(4n-8)^5}$, $n \in \mathbb{N}$
2. $c_n := 1 + (-1)^n \frac{n^4}{n^4+1}$, $n \in \mathbb{N}$

Aufgabe 2: Eine Menge, die zur Menge der Punkte des Intervals $[0,1]$ gleichmächtig ist, heißt *Kontinuum*. Zeigen Sie, dass folgende Mengen Kontinua sind:

1. $\mathbb{R}$ 2. $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ 3. $\mathbb{R}^2$

4. Die Menge aller unendlichen Tupels der natürlichen Zahlen: $M = \{(n_1, n_2, ...),\ n_i \in \mathbb{N}, i = 1, 2, ...\}$

Aufgabe 3: Zeigen Sie, dass folgenden Folgen divergieren

1) $a_n = 1 + (-1)^n$, $n \in \mathbb{N}$

2) $b_n = \cos n$, $n \in \mathbb{N}$

3) $c_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$

Hinweis: Benutzen Sie bei 2. die Periodizität von cos, um Teilfolgen mit unterschiedlichen Grenzwerten zu finden.

Aufgabe 4: Sei $(a)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge, die gegen a konvergiert. Beweisen Sie, dass die Folge $(b)_{n\in\mathbb{N}}$, definiert durch

$$b_n = \frac{a_1 + a_2 + ... + a_n}{n}, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

ebenfalls gegen a konvergiert.

Aufgabe 5: (*Zur Abgabe*)
Berechnen Sie, falls möglich:

1. $\sum_{n=1}^{\infty} nq^n$ für $q \in \mathbb{R}$ 2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ 3. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+2)}$

Hinweis: Bei 1. könnte Aufgabe 5, Blatt 5, hilfreich sein.

Aufgabe 6: Beweisen Sie, dass, wenn alle Teilfolgen einer Folge konvergieren, die ganze Folge konvergiert.

Aufgabe 7: Seien a und b reele Zahlen. Die Folge $(a)_{n\in\mathbb{N}}$ sei wie folgt rekursiv definiert:

$$a_0 := a, \quad a_1 := b, \quad a_n := \frac{1}{2}(a_{n-1} + a_{n-2}) \quad \text{für } n \geq 2$$

Beweisen Sie, dass die Folge $(a)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert und bestimmen Sie ihren Grenzwert.

Aufgabe 8: Stellen Sie die Dezimalzahl 42 im diadischen (binären) sowie im triadischen Zahlensystem dar.