MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT MÜNCHEN

WS 2018/2019

Übungen zur Mathematik I für Physiker

Prof. Dr. D.-A. Deckert

Blatt 5

*Die Aufgaben, neben denen "Zur Abgabe" steht, können in **Dreier- oder Vierergruppen** gelöst und mithilfe von UniWorX bis Freitag, 23.11., 14:00 Uhr abgegeben werden. **Nur** diese Aufgaben werden korrigiert.*

Aufgabe 1: (*Zur Abgabe*)

1. Die Teilmenge der reelen Zahlen $\mathbb{Q}(\sqrt{2}) := \{a + b\sqrt{2},\ a, b \in \mathbb{Q}\}$ mit der Addition und Multiplikation geerbt von $\mathbb{R}$ ist ein Körper. Lösen Sie in diesem Körper folgende Gleichungen:

   (a) $a \cdot x = b$, wobei $a = a_1 + a_2\sqrt{2}$ und $b = b_1 + b_2\sqrt{2}$

   (b) $x^2 = 9 + 4\sqrt{2}$

2. Betrachten Sie nun den Körper $(F_5, \oplus, \otimes)$, wobei $F_5 := \{0, 1, 2, 3, 4\}$ ist und die Verknüpfungen $\oplus$ und $\otimes$ analog zu denen in der Vorlesung für den Körper $(F_2, \oplus, \otimes)$ jeweils als die Reste der Addition bzw. Multiplikation bei Division durch 5 definiert sind.
   Lösen Sie in diesem Körper die Gleichung

$$(3 \otimes x) \oplus 4 = 2.$$

Aufgabe 2: (*Zur Abgabe*)
Sei $n \in \mathbb{N}$, seien $x, y, z, x_i, y_i \in \mathbb{R}$ mit $i \in \{1, ..., n\}$ und sei $|\cdot|$ der Absolutbetrag.
Beweisen Sie folgende sog. Dreiecksungleichungen:

1. $|x + y| \leq |x| + |y|$
2. $|x| - |y| \leq |x + y|$
3. $|\sum_{i=1}^{n}(x_i + y_i)| \leq \sum_{i=1}^{n}(|x_i| + |y_i|)$

Zeigen Sie weiterhin, dass gilt: $2|xy| \leq x^2z^2 + \frac{y^2}{z^2}$ für $z \neq 0$.

Aufgabe 3: Zeigen Sie, dass der Körper der komplexen Zahlen aus Aufgabe 6, Blatt 4, nicht angeordnet werden kann.

Aufgabe 4: Widerlegen Sie mithilfe eines Gegenbeispiels die Aussage

$$(\forall n \in \mathbb{N}\; a_n > b_n) \Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n > \lim_{n\to\infty} b_n,$$

wobei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergierende Folgen in den reelen Zahlen sind.

Aufgabe 5: Betrachten Sie die Folge (a_n) mit

$$a_n := q^n \quad \text{für } q \in \mathbb{R}\ ,\ n \in \mathbb{N}.$$

Untersuchen Sie diese Folge auf Konvergenz für $|q| < 1$, $|q| = 1$ sowie $|q| > 1$. Beweisen Sie Ihre Antworten.

Aufgabe 6: Beweisen Sie, dass im Körper der reelen Zahlen gilt:

1. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} = 0$

2. $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=0}^{n} q^k = \frac{1}{1-q}\ ,\ \forall |q| < 1$

Aufgabe 7: Sei $p \in \mathbb{N}, p > 1$ und sei (a_n) eine Folge mit $a_i \in \{0, 1, ..., p-1\}\ \forall i \in \mathbb{N}$.
Zeigen Sie, dass die Folge (x_n) mit

$$x_n := \sum_{i=1}^{n} a_i p^{-i}\ ,\ n \in \mathbb{N}$$

eine Cauchy-Folge ist.

Aufgabe 8: Erinnern Sie sich an die Definition der Verknüpfungen $\oplus, \odot$ auf der Menge der rationalen Zahlen $\mathbb{Q} := Q/\overset{Q}{=}$, wobei $Q = \{(p,q), p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}\}$ und $\Big((a,b) \overset{Q}{=} (c,d) \Leftrightarrow (ad = bc)\Big)$:

$$\begin{aligned} \forall x, y \in \mathbb{Q} \quad x \oplus y &:= [(a,b) \oplus (c,d)]_{\underset{=}{Q}} := [(ad+bc, bd)]_{\underset{=}{Q}} && (1)\\ x \odot y &:= [(a,b) \odot (c,d)]_{\underset{=}{Q}} := [(ac, bd)]_{\underset{=}{Q}}, && (2) \end{aligned}$$

wobei (a,b) und (c,d) irgendwelche Elemente von jeweils x und y sind.

Weisen Sie nach, dass diese Verknüpfungen wohldefiniert sind, d. h., dass die Ergebnisse der Addition $\oplus$ und der Multiplikation $\odot$ (die rechten Seiten von (1) und (2)) davon unabhängig sind, welche Elemente (a,b) und (c,d) von x und y gewählt werden.