

Übungen zur Mathematik I für Physiker

Prof. Dr. D.-A. Deckert

Blatt 3

Die Aufgaben, neben denen “Zur Abgabe” steht, können in **Dreier- oder Vierergruppen** gelöst und mithilfe von UniWorX bis Freitag, 09.11., 14:00 Uhr abgegeben werden. **Nur** diese Aufgaben werden korrigiert.

Hinweis: Im Folgenden bedeutet die “Wahrscheinlichkeit” die Laplacesche Wahrscheinlichkeit, d.h. das Verhältnis aus der Anzahl der Möglichkeiten jenes Ereignis zu erhalten und der Anzahl der Möglichkeiten ein bestimmtes Ereignis zu bekommen.

Aufgabe 1:

1. Finden Sie die Summe der dritten Potenzen der ersten n natürlichen Zahlen $\sum_{k=1}^n k^3$. Nutzen Sie dafür die Identität

$$(n+1)^4 = \sum_{k=0}^n ((k+1)^4 - k^4). \quad (1)$$

Prüfen Sie Ihre Antwort mithilfe der Induktion.

2. Finden Sie die Anzahl der Elemente der Potenzmenge $\mathcal{P}(M)$, wo M eine n -elementige Menge ist. Finden Sie dafür die Summe $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k}$ mithilfe des binomischen Lehrsatzes. Prüfen Sie das Ergebnis mit der Induktion.

Aufgabe 2: (Zur Abgabe)

Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit m Mal Kopf in n Münzenwürfen zu bekommen.

Aufgabe 3: (Zur Abgabe)

1. Was ist die Wahrscheinlichkeit alle 7 Zahlen (6 und die Superzahl) im Lotto 6 aus 49 zu raten? (Die 6 Zahlen werden von den Zahlen von 1 bis 49 gewählt und die Superzahl von 1 bis 9).
2. Wie groß wäre die Wahrscheinlichkeit in 1), wenn es auch auf die Reihenfolge ankommen würde?

Aufgabe 4:

1. Wie viele Wege gibt es die natürliche Zahl n als die Summe anderer r natürlichen Zahlen darzustellen, wenn die Darstellungen, die nur in der Ordnung der Summanden sich unterscheiden, als unterschiedliche zählen.
2. Was ist die Wahrscheinlichkeit mit n Würfeln k Sechser zu bekommen?

(Tipp: Man kann jedem Wurf von n Würfeln eine Folge von 0 und 1 gegenüberstellen, wo man zuerst so viele Einser schreibt, wie viele Einser gewürfelt wurden, dann 0, dann so viele Einser, wie viele Zweier gewürfelt wurden, dann wieder 0, u.s.w. Ein sehr ähnlicher Trick hilft auch in 1))

Bemerkung: Genau so viele Möglichkeiten, wie die Antwort von 1), gibt es Zustände eines n -Teilchen Systems, wenn jedes Teilchen sich in einem der r Zustände befinden kann. Oder allgemein: Es gibt genau so viele Varianten, n ununterscheidbare Objekte zwischen r Boxen zu verteilen, wie die Antwort von 1).

Aufgabe 5:

1. Sie haben n verschiedene Bücher. Ins Regal passen aber nur $k < n$. Wie viele Varianten gibt es, aus den n Büchern k Bücher auszuwählen und im Regal anzuordnen?
2. Sie haben n Bücher. Unter denen gibt es r Gruppen von gleichen Büchern, die Anzahl der Bücher in der Gruppe Nummer i ist k_i . Wie viele Wege gibt es, diese ganzen Bücher im Regal anzuordnen?

Aufgabe 6: Wie viele Äquivalenzrelationen gibt es auf der n -elementigen Menge M ?

(Tipp: Nutzen Sie das Ergebniss von der Aufgabe 1 vom Blatt 2. Zeigen Sie außerdem, dass jede disjunkte Verteilung von M irgendeiner Äquivalenzrelation entspricht.)