MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT MÜNCHEN WS 2018/2019

Übungen zur Mathematik I für Physiker

Prof. Dr. D.-A. Deckert

Blatt 2

Die Aufgaben, neben denen "Zur Abgabe" steht, können in ***Dreier- oder Vierergruppen*** *gelöst und mithilfe von UniWorX bis Freitag, 02.11., 14:00 Uhr abgegeben werden.* ***Nur*** *diese Aufgaben werden korrigiert.*

Aufgabe 1: (*Zur Abgabe*)
Definition: Zwei Mengen M und N heißen disjunkt, falls gilt: $M \cap N = \varnothing$

Sei M eine Menge und W eine Äquivalenzrelation auf M. Wie wir schon auf Blatt 1 eingeführt haben, heißt die Menge aller Elemente, die unter W Elementen $m \in M$ äquivalent sind, Äquivalenzklasse: $[m]_W := \{n \in M |\ mWn\}$. Seien $x, y \in M$. Beweisen Sie, dass $xWy \Rightarrow [x]_W = [y]_W$ (wenn x äquivalent y ist, sind ihre Äquivalenzklassen gleich), und dass $\neg(xWy) \Rightarrow [x]_W \cap [y]_W = \varnothing$ (wenn x und y nicht äquivalent sind, sind ihre Äquivalenzklassen disjunkt).

Bemerkung: Äquivalenzklassen sind demnach disjunkt und es gilt $M = \bigcup_{x \in M} [x]_W$.

Aufgabe 2: (*Zur Abgabe*)
Sei $R := \{(x)_{n\in\mathbb{N}} |\ n \in \mathbb{N} : x_n \in \mathbb{Q} \wedge (x)_{n\in\mathbb{N}} \text{ ist Cauchy}\}$. Auf R definieren wir für $(x)_{n\in\mathbb{N}}, (y)_{n\in\mathbb{N}} \in R$

$$\left((x)_{n\in\mathbb{N}} \overset{R}{=} (y)_{n\in\mathbb{N}}\right) \Leftrightarrow ((x_n - y_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ ist eine Nullfolge.}) \qquad (1)$$

Zeigen Sie, dass $\overset{R}{=}$ eine Äquivalenzrelation ist. (Siehe die Def. auf Blatt 1)

(*Tipp: Prüfen Sie, dass* $\overset{R}{=}$ *reflexiv, symmetrisch und transitiv ist. Z.B. sollen Sie für die Reflexivität zeigen, dass* $(x)_{n\in\mathbb{N}} \overset{R}{=} (x)_{n\in\mathbb{N}}$.)

Bemerkung: Die reelen Zahlen sind also Äquivalenzklassen in R, d.h. Elemente des Quotientenraums $R/ \overset{R}{=}$.

Aufgabe 3: Beweisen Sie, dass $\sqrt{3}$ keine rationale Zahl ist.

Aufgabe 4: Gegeben ist die Folge $(x)_{n\in\mathbb{N}}$, für $\forall n \in \mathbb{N} : x^a_{n+1} := \frac{3+x^a_n}{1+x^a_n}$ und $x^a_0 = a$, $a \in \mathbb{Q}$. Für $a > -1$ zeigen Sie

1. $\forall n \in \mathbb{N} : \quad x_n \in \mathbb{Q} \wedge x_n \geq 1$ (mit vollständiger Induktion)

2. $\forall n \in \mathbb{N}: \quad \frac{|(x_{n+1}^a)^2-3|}{|(x_n^a)^2-3|} \leq \frac{1}{2}$

3. $\forall n \in \mathbb{N}: \quad |(x_n^a)^2 - 3| \leq (\frac{1}{2})^n |a^2 - 3|$

Nehmen Sie an, dass $\left((\frac{1}{2})^n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge ist (das werden wir bald mithilfe des Archimedischen Axioms beweisen). Zeigen Sie, dass dann

4. $\forall a > -1: \ ((x_{n+1}^a)^2 - 3)_{n\in\mathbb{N}}$ ist eine Nullfolge.

5. $\forall a > -1: \ (x^a)_{n\in\mathbb{N}} \in R$.

6. $\forall a, b > -1: \ (x^a)_{n\in\mathbb{N}} \stackrel{R}{=} (x^b)_{n\in\mathbb{N}}$.

Bemerkung: Die Folge $(x^a)_{n\in\mathbb{N}}$ stellt also für $\forall a > -1$ dieselbe reele Zahl dar. Welche? Was passiert für $a < -1$ und warum müssen wir $a = -1$ ausschließen?

(*Tipp: Nutzen Sie für die Punkte 5. und 6. die Identität* $(x_n^a)^2 - (x_n^b)^2 = (x_n^a - x_n^b)(x_n^a + x_n^b)$, *die Dreieckungleihung* $|a + b| \leq |a| + |b|$ *und die Punkte 1. und 4.*)

Aufgabe 5: Beweisen Sie mithilfe der vollständigen Induktion

1. $\forall n \in \mathbb{N} \quad \sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

2. (Bernoullische Ungleichung) $\forall n \in \mathbb{N}, x > -1 \quad (1 + x)^n \geq 1 + nx$

Aufgabe 6: Sie schneiden einen Pfannkuchen so, dass sich alle Ihre Schnitte innerhalb des Pfannkuchens kreuzen, sich aber keine drei der Schnitte im selben Punkt kreuzen. Sie machen n Schnitte. In wie viele Teile wird der Pfannkuchen unterteilt? Beweisen Sie Ihre Aussage mithilfe der vollständigen Induktion.