MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT MÜNCHEN

WS 2018/2019

Übungen zur Mathematik I für Physiker

Prof. Dr. D.-A. Deckert

Blatt 13

Die Aufgaben, neben denen "Zur Abgabe" steht, können in ***Dreier- oder Vierergruppen*** *gelöst und mithilfe von UniWorX bis Freitag, 01.02.2019, 14:00 Uhr zur Korrektur abgegeben werden.*

Aufgabe 1: *(Zur Abgabe)*

(a) Sei $D \subseteq \mathbb{R}$. Eine Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ heißt Lipschitz-stetig, falls

$$\exists L \in \mathbb{R}\ \forall x, y \in D : |f(x) - f(y)| \leq L|x - y|.$$

Zeigen Sie, dass jede stetig differenzierbare Funktion, deren Ableitung beschränkt ist, Lipschitz-stetig ist.

(b) Seien $x \in D$, $f, g \in \mathcal{D}^n(D, \mathbb{R})$, d.h. n-mal differenzierbar auf D. Zeigen Sie mittels vollständiger Induktion, dass

$$\frac{d^n}{dx^n}(f(x)g(x)) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(n-k)}(x) g^{(k)}(x)$$

Aufgabe 2: *(Zur Abgabe)*

(a) Geben Sie alle lokalen Extrema folgender Funktionen an:

  (a) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto \sin(x)$
  (b) $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}, x \mapsto \frac{\log(x)}{x}$
  (c) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto x^n e^{-x}$ mit $n \in \mathbb{N}$

(b) Berechnen Sie mithilfe der Regel von L'Hôpital:

  (a) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\log(1 - x)}{x}$
  (b) $\lim\limits_{x \to \infty} x \tan \dfrac{1}{x}$
  (c) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\log(1 + x + x^2) - x}{x^2}$

(c) Berechnen Sie die ersten fünf Taylor-Polynome $T_5 f(x; 1)$ folgender Funktionen:

(a) $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}, x \mapsto \frac{1}{x^2}$

(b) $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}, x \mapsto \frac{\cos(x)}{x^3}$

Aufgabe 3:

(a) Zeigen Sie, dass $\mathcal{C}^0(D, \mathbb{R}) \supset \mathcal{C}^1(D, \mathbb{R}) \supset \cdots \supset \mathcal{C}^n(D, \mathbb{R})$. Begründen Sie, dass die Definition $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}) = \bigcap\limits_n \mathcal{C}^n$ sinnvoll ist.

(b) Seien $f, g \in \mathcal{C}^\infty(D, \mathbb{R})$. Zeigen Sie, dass $f \circ g \in \mathcal{C}^\infty(D, \mathbb{R})$.

Aufgabe 4:

(a) Zeigen Sie, dass $T_\infty f(x; x_0)$ für $\exp(x)$, $\cos(x)$ und $\sin(x)$ auf ganz $\mathbb{R}$ gegen die jeweilige Funktion konvergiert.

(b) Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & \text{für } x \neq 0 \\ 0 & \text{für } x = 0 \end{cases}$.
Zeigen Sie mithilfe der vollständigen Induktion, dass $f \in \mathcal{C}^\infty$, also unendlich oft stetig differenzierbar ist.

(c) Entwickeln Sie die in Teilaufgabe (b) definierte Funktion f um den Punkt $x_0 = 0$ mittels Taylor-Polynomen. Zeigen Sie, dass $\lim\limits_{n\to\infty} T_n f(x; 0) = 0$.
Bemerkung: Daraus folgt, dass $T_\infty f(x; 0)$ zwar auf ganz $\mathbb{R}$ konvergiert, allerdings nicht gegen f.

Aufgabe 5:

(a) Zeigen Sie, dass

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto \begin{cases} x^2 \sin(\frac{1}{x}) & \text{für } x \neq 0 \\ 0 & \text{für } x = 0 \end{cases}$$

überall differenzierbar ist, aber die Ableitungsfunktion unstetig ist.

(b) Zeigen Sie, dass

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto \begin{cases} e^{\frac{1}{x^2-1}} & \text{für} \quad |x| < 1 \\ 0 & \qquad \text{sonst} \end{cases}$$

überall unendlich oft differenzierbar ist.
Finden Sie eine Funktion, die von $a \in \mathbb{R}^+$ abhängt, auf ganz $\mathbb{R}$ unendlich oft stetig differenzierbar ist sowie den Träger $[-a, a]$ hat, d.h. nur in diesem Intervall ungleich 0 ist.
Bemerkung: Der Raum der unendlich oft stetig differenzierbaren reelen Funktionen mit kompakten Träger wird oft mit $\mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R})$ abgekürzt.

Aufgabe 6: Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ und seien $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ zwei stetige Funktionen, die auf (a, b) differenzierbar sind. Zeigen Sie, dass

$$\exists \gamma \in (a, b) : (f(a) - f(b))g'(\gamma) = (g(a) - g(b))f'(\gamma).$$