Jago Silberbauer

Übungsaufgaben zur Klausurvorbereitung - Mathematik 1 für Physiker

Aufgabe 1: Untersuche diese Folgen auf Konvergenz in $\mathbb{R}$ und bestimme gegebenenfalls den Grenzwert:

$$a_n = n(-1)^n, \quad b_n = \sqrt[n]{1+\frac{1}{n}}, \quad c_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n^2}, \quad d_n = \prod_{k=2}^{n}(1+\frac{1}{k}), \quad e_n = \cos(n\pi),$$

$n \in \mathbb{N}$.

Lösung:

$\underline{a_n}$:
Die Folge divergiert unbestimmt, da es zu jedem $x \in \mathbb{R}_+$ und jedem $y \in \mathbb{R}_-$ ein $N_x \in \mathbb{N}$ und $N_y \in \mathbb{N}$ gibt, sodass $a_{N_x} > x$ und $a_{N_y} < y$ gelten.

$\underline{b_n}$:
Es gilt die Ungleichung

$$1 \leq \sqrt[n]{1+\frac{1}{n}} \leq 1 + \frac{1}{n}$$

für alle $n \in \mathbb{N}$. Weiterhin gilt $\lim_{n\to\infty} 1 = 1$ und $\lim_{n\to\infty} 1 + \frac{1}{n} = 1$. Mit dem Sandwich-Lemma folgt dann $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{1+\frac{1}{n}} = 1$.

$\underline{c_n}$:
Die Gauß'sche Summenformel lautet $\sum_{k=1}^{n} k = \frac{1}{2}n(n+1)$. Damit folgt

$$c_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n^2} = \frac{1}{n^2}\frac{1}{2}n(n+1) = \frac{1}{2} \cdot \frac{n+1}{n}.$$

Insgesamt erhalten wir dann $\lim_{n\to\infty} c_n = \frac{1}{2}$.

$\underline{d_n}$:
Es gilt $1 + \frac{1}{k} = \frac{k+1}{k}$. Ähnlich wie bei einer Teleskopsumme reduziert sich dann das Produkt in d_n zu

$$d_n = \prod_{k=2}^{n}(1+\frac{1}{k}) = \prod_{k=2}^{n}\frac{k+1}{k} = \frac{n+1}{2}.$$

Damit folgt, dass die Folge bestimmt divergiert gegen ∞.

$\underline{e_n}$:
Wir wollen zeigen, dass die Folge divergiert. Dafür finden wir zwei konvergente Teilfolgen mit unterschiedlichen Grenzwerten. Wähle die Teilfolgen e_{2n} und e_{2n-1}. Dann gelten

$$e_{2n} = 1, \quad e_{2n-1} = -1$$

für alle $n \in \mathbb{N}$. Somit $\lim_{n\to\infty} e_{2n} = 1$ und $\lim_{n\to\infty} e_{2n-1} = -1$. Damit ist die Folge divergent.

Aufgabe 2: Es seien $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$, mit $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ beschränkt. Zeige $\lim_{n\to\infty} a_n b_n = 0$.

Lösung: Da die Folge $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ beschränkt ist, gibt es ein $M \in \mathbb{R}_+$, sodass $|b_n| \leq M$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt. Sei $\epsilon > 0$. Wegen $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ existiert ein $N \in \mathbb{N}$, sodass $|a_n| < \frac{\epsilon}{M}$ für alle $n \geq N$ gilt. Sei nun $n \geq N$. Dann folgt

$$|a_n b_n| = |a_n| \cdot |b_n| \leq M|a_n| < M \cdot \frac{\epsilon}{M} = \epsilon.$$

Und damit gilt $\lim_{n\to\infty} a_n b_n = 0$.

Aufgabe 3: Sei $q \in]0,1[$ und $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ eine Folge mit $a_1 \neq a_2$ und der folgenden Eigenschaft:

$$\forall_{n\in\mathbb{N}\setminus\{1\}} : |a_{n+1} - a_n| \leq q|a_n - a_{n-1}|.$$

Zeige, dass $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge ist.

Lösung: Durch iteriertes Anwenden der gegebenen Eigenschaft erhalten wir

$$|a_{n+1} - a_n| \leq q^{n-1} \cdot |a_2 - a_1|$$

für alle $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$. Sei nun $\epsilon > 0$. Da $|q| < 1$, konvergiert $\sum_{n=1}^{\infty} |q|^{n-1}$ (geometrische Reihe). Das bedeutet, dass die Folge $(R_l)_{l\in\mathbb{N}}$, definiert durch $R_l := \sum_{n=l}^{\infty} |q|^{n-1}$ eine Nullfolge ist. Damit können wir $N \in \mathbb{N}$ wählen, sodass $|R_l| < \frac{\epsilon}{|a_2 - a_1|}$ für alle $l \geq N$ gilt. Seien nun $k, l > N$. Dann folgt mit der Dreiecksungleichung und der gegebenen Eigenschaft

$$\begin{aligned} |a_k - a_l| &= \left| \sum_{n=l}^{k-1} a_{n+1} - a_n \right| \leq \sum_{n=l}^{k-1} |a_{n+1} - a_n| \leq |a_2 - a_1| \sum_{n=l}^{k-1} |q|^{n-1} \\ &\leq |a_2 - a_1| \sum_{n=l}^{\infty} |q|^{n-1} < |a_2 - a_1| \cdot \frac{\epsilon}{|a_2 - a_1|} = \epsilon. \end{aligned}$$

Damit ist $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge.

Aufgabe 4: Betrachte die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ rekursiv definiert durch

$$a_0 = 0, \quad a_{n+1} = \frac{2}{3} a_n + \frac{1}{3}.$$

Bestimme den Grenzwert.

Lösung: Es gilt

$$a_{n+1} - a_n = \frac{2}{3}(a_n - a_{n-1}).$$

Iteriertes Anwenden liefert

$$a_{n+1} - a_n = \left(\frac{2}{3}\right)^n (a_1 - a_0) = \left(\frac{2}{3}\right)^n \cdot \frac{1}{3}.$$

Wir schreiben nun die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ als Teleskopsumme

$$a_N = \sum_{n=1}^{N} a_n - a_{n-1} = \frac{1}{3}\left(\sum_{n=1}^{N}\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}\right) = \frac{1}{3}\left(\sum_{n=0}^{N-1}\left(\frac{2}{3}\right)^{n}\right)$$

Mit der geometrischen Reihe erhalten wir dann

$$\lim_{N\to\infty} a_N = \frac{1}{3}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^{n}\right) = 1.$$

Aufgabe 5: Untersuche diese Reihen auf Konvergenz:

$$\sum_{n=1}^{\infty}(\ln(n+1) - \ln(n)), \qquad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^4}{3^n}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^n, \qquad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^n}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin^2(n)}{n^4}.$$

Lösung: Für die erste Reihe betrachten wir zunächst die Partialsummen und verwenden einen Indexshift, um eine Teleskopsumme zu erzeugen:

$$\sum_{n=1}^{N}(\ln(n+1)-\ln(n)) = \sum_{n=1}^{N}\ln(n+1)-\sum_{n=1}^{N}\ln(n) = \sum_{n=1}^{N}\ln(n+1)-\sum_{n=0}^{N-1}\ln(n+1) = \ln(N)-\ln(0).$$

Damit folgt $\lim_{N\to\infty}\sum_{n=1}^{N}(\ln(n+1) - \ln(n)) = \lim_{N\to\infty}\ln(N) = \infty$. Die Reihe divergiert also. Bei der zweiten Reihe machen wir vom Quotientenkriterium Gebrauch:

$$\left|\frac{(n+1)^4}{3^{n+1}} \cdot \frac{3^n}{n^4}\right| = \frac{1}{3}\cdot\left(\frac{n+1}{n}\right)^4 \to \frac{1}{3} < 1.$$

Damit konvergiert die Reihe nach dem Quotientenkriterium. Bei der dritten Reihe zeigen wir Divergenz mithilfe des Nullfolgenkriteriums. Es gilt

$$\left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \to e \neq 0.$$

Die Reihe divergiert also nach dem Nullfolgenkriterium. Wir zeigen für die vierte Reihe Konvergenz mit dem Wurzelkriterium:

$$\sqrt[n]{\left|\frac{1}{n^n}\right|} = \frac{1}{n} \to 0 < \frac{1}{2} < 1,$$

wobei die erste Ungleichung für $n \in \mathbb{N}$ groß genug gilt. Somit konvergiert die Reihe nach dem Wurzelkriterium. Die letzte Reihe konvergiert nach dem Majorantenkriterium, denn es gilt

$$\left|\frac{\sin^2(n)}{n^4}\right| \leq \frac{1}{n^4}$$

und die Reihe über $\frac{1}{n^4}$ konvergiert.

Aufgabe 6: Bestimme den Grenzwert der Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n}.$$

Hinweis: Zeige zunächst

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{n}{2^n} = 2 - \frac{N+2}{2^N}.$$

Lösung: Wir führen zunächst einen Induktionsbeweis, um die im Hinweis gegebene Identität zu zeigen.

<u>Induktionsanfang:</u>

Sei $N = 1$. Dann gilt

$$\sum_{n=1}^{1} \frac{n}{2^n} = \frac{1}{2} = 2 - \frac{1+2}{2^1}.$$

<u>Induktionsschritt:</u>

Für ein $N \in \mathbb{N}$ gelte nun

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{n}{2^n} = 2 - \frac{N+2}{2^N}.$$

Dann folgt für den Nachfolger $N + 1$ mit unserer Induktionsvoraussetzung

$$\sum_{n=1}^{N+1} \frac{n}{2^n} = \frac{N+1}{2^{N+1}} + \sum_{n=1}^{N} \frac{n}{2^n} = \frac{N+1}{2^{N+1}} + 2 - \frac{N+2}{2^N} = 2 - \frac{N+3}{2^{N+1}}.$$

Insgesamt folgt nun für die zu untersuchende Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n} = \lim_{N\to\infty} 2 - \frac{N+2}{2^N} = 2 - \lim_{N\to\infty} \frac{N+2}{2^N} = 2.$$

Aufgabe 7: Es sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}\subset\mathbb{R}}$ beschränkt und $x \in]0,1[$. Zeige, dass $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ konvergiert.

Lösung: Da $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ beschränkt ist, gibt es ein $M \in \mathbb{R}_+$, sodass $|a_n| \le M$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt. Wir verwenden nun das Majorantenkriterium. Es gilt

$$|a_n x^n| = |a_n| \cdot |x|^n \le M|x|^n.$$

Die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} M|x|^n$ konvergiert wegen $|x| < 1$ (geometrische Reihe). Wir haben also eine summierbare Majorante gefunden. Damit konvergiert $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ nach dem Majorantenkriterium.

Aufgabe 8: Es bezeichne $d(n)$ die Anzahl der Dezimalstellen einer natürlichen Zahl n (z. B. $d(15) = 2$). Untersuche die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{nd(n)}$$

auf Konvergenz.

Lösung: Bei der gegebenen Reihe handelt es sich um eine alternierende Reihe. Nach dem Leibnizkriterium reicht es daher zu zeigen, dass $a_n := \frac{1}{nd(n)}$, $n \in \mathbb{N}$, eine monoton fallende Nullfolge ist, um zu beweisen, dass die Reihe konvergiert. Dies ist offensichtlich der Fall ($0 \le a_n \le n^{-1}$).

Aufgabe 9: Betrachten Sie die Funktion $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}, x \mapsto f(x) := \ln(x)$. Finde eine Formel für die n-te Ableitung von f, $n \in \mathbb{N}$, und beweise sie mit einem Induktionsbeweis.

Lösung: Unser Ansatz für eine Formel ist

$$f^{(n)}(x) = (-1)^{n+1} \cdot \frac{(n-1)!}{x^n}$$

(durch rumprobieren!).
Induktionsanfang: Sei $n = 1$. Dann gilt

$$f^{(1)}(x) = \frac{1}{x} = (-1)^2 \cdot \frac{0!}{x^1}.$$

Induktionsschritt: Es gelte

$$f^{(n)}(x) = (-1)^{n+1} \cdot \frac{(n-1)!}{x^n}$$

für ein $n \in \mathbb{N}$. Dann folgt für den Nachfolger $n+1$

$$f^{(n+1)}(x) = \left(f^{(n)}(x)\right)' = \left((-1)^{n+1} \cdot \frac{(n-1)!}{x^n}\right)' = (-1)^{n+1} \cdot (-n) \cdot \frac{(n-1)!}{x^{n+1}} = (-1)^{n+2} \cdot \frac{n!}{x^{n+1}}.$$

Aufgabe 10: Zeige, dass die Gleichung

$$x^4 = 1 + x$$

im Intervall $[1,\infty[$ genau eine Lösung hat.

Lösung: Wir definieren die Funktion

$$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\quad x\mapsto f(x):=x^4-x-1.$$

Die Behauptung folgt, sobald wir gezeigt haben, dass f in $[1,\infty[$ genau eine Nullstelle hat. Es gilt $f(1)=-1<0$ und $f(2)=13>0$. mit dem Zwischenwertsatz folgt dann, dass es ein $x_0\in]1,2[$ geben muss, sodass $f(x_0)=0$ gilt. Für die Eindeutigkeit nehmen wir nun an es gebe noch ein $\widetilde{x}\in]1,2[$, sodass $f(\widetilde{x})=0$ gilt. Dann folgt

$$\widetilde{x}^4-\widetilde{x}-1=x_0^4-x_0-1.$$

Umformen liefert

$$(\widetilde{x}^2+x_0^2)(\widetilde{x}+x_0)(\widetilde{x}-x_0)=\widetilde{x}-x_0. \tag{1}$$

Die Gleichung (1) kann nur gelten, falls $\widetilde{x}-x_0=0$ oder $(\widetilde{x}^2+x_0^2)(\widetilde{x}+x_0)=1$ gilt. Letzteres ist jedoch nicht möglich, wegen $\widetilde{x},x_0\in]1,2[$. Dass heißt es muss $\widetilde{x}=x_0$ gelten, was uns die Eindeutigkeit von x_0 liefert.

Aufgabe 11: Es sei $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ eine stetig differenzierbare Funktion. Außerdem existiere ein $C\in\mathbb{R}_+$, sodass $|f'(x)|\le C$ für alle $x\in\mathbb{R}$ gilt. Zeige, dass dann f gleichmäßig stetig ist.
Hinweis: Verwende den Mittelwertsatz der Differentialrechnung.

Lösung: Die Funktion f ist differenzierbar. Dann gibt es nach dem Mittelwertsatz für alle $x,y\in\mathbb{R}$ ein $\xi\in\mathbb{R}$, sodass

$$\frac{f(x)-f(y)}{x-y}=f'(\xi).$$

Da die Ableitung durch C beschränkt ist, folgt

$$\frac{|f(x)-f(y)|}{|x-y|}\le C \tag{2}$$

für alle $x,y\in\mathbb{R}$. Sei $\epsilon>0$. Wähle $\delta:=\frac{\epsilon}{C}$. Seien nun $x,y\in\mathbb{R}$ mit $|x-y|<\delta$. Dann folgt mit (2)

$$|f(x)-f(y)|\le C|x-y|<C\cdot\frac{\epsilon}{C}=\epsilon.$$

Damit ist f gleichmäßig stetig.

Aufgabe 12: Betrachte die Funktion

$$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\quad x\mapsto f(x):=\begin{cases}x, & \text{falls } x\ge 0,\\ \sin(x), & \text{sonst.}\end{cases}$$

Zeige, dass diese Funktion zweimal stetig differenzierbar ist. Existiert auch die dritte Ableitung dieser Funktion?

Lösung: Die beiden Funktionen $\mathrm{Id}(x)$ und $\sin(x)$ sind differenzierbar auf ganz $\mathbb{R}$. f ist stückweise durch diese beiden Funktionen definiert. D.h. um die Differenzierbarkeit von f

zu zeigen, reicht es die Differenzierbarbeit im Punkt $x = 0$ zu zeigen. Hierfür beweisen wir die Gleichheit des rechtsseitigen und linksseitigen Limes vom Differenzenquotienten:

$$\lim_{x \searrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \searrow 0} \frac{x}{x} = 1,$$

$$\lim_{x \nearrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \nearrow 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1.$$

Damit existiert die Ableitung und ist gegeben durch

$$f'(x) = \begin{cases} 1, & \text{falls } x \geq 0, \\ \cos(x), & \text{sonst.} \end{cases}$$

Wir machen nun das gleiche Procedere wie eben, um zu zeigen, dass die Ableitung von f wieder differenzierbar ist.

$$\lim_{x \searrow 0} \frac{f'(x) - f'(0)}{x - 0} = \lim_{x \searrow 0} \frac{1 - 1}{x} = 0,$$

$$\lim_{x \nearrow 0} \frac{f'(x) - f'(0)}{x - 0} = \lim_{x \nearrow 0} \frac{\cos(x) - 1}{x - 0} = \lim_{x \nearrow 0} \frac{\cos(x) - \cos(0)}{x - 0} = \cos'(0) = -\sin(0) = 0.$$

Damit existiert auch die zweite Ableitung von f. sie hat die Form

$$f''(x) = \begin{cases} 0, & \text{falls } x \geq 0, \\ -\sin(x), & \text{sonst.} \end{cases}$$

Weitere Ableitungen existieren jedoch nicht, da die Limiten für $x \searrow 0$ und $x \nearrow 0$ nicht mehr übereinstimmen.

Aufgabe 13: Berechne den Wert der folgenden bestimmten Integrale:

$$\int_1^2 \frac{\cos(\ln(x))}{x} dx, \qquad \int_0^\pi \cos^2(x) \sin(x) dx.$$

Lösung: Wir substituieren im ersten Integral $u = \ln(x)$. Dann folgt

$$\int_1^2 \frac{\cos(\ln(x))}{x} dx = \int_0^{\ln(2)} \cos(u) du = [\sin(u)]_0^{\ln(2)} = \sin(\ln(2)).$$

Für das zweite Integral lässt sich sofort eine Stammfunktion angeben:

$$\int_0^\pi \cos^2(x) \sin(x) dx = \Big[-\frac{1}{3} \cdot \cos^3(x) \Big]_0^\pi = \frac{2}{3}.$$