Jago Silberbauer

Übungsaufgaben zur Klausurvorbereitung - Mathematik 1 für Physiker

Aufgabe 1: Untersuche diese Folgen auf Konvergenz in $\mathbb{R}$ und bestimme gegebenenfalls den Grenzwert:

$$a_n = n(-1)^n, \quad b_n = \sqrt[n]{1+\frac{1}{n}}, \quad c_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n^2}, \quad d_n = \prod_{k=2}^{n}(1+\frac{1}{k}), \quad e_n = \cos(n\pi),$$

$n \in \mathbb{N}$.

Aufgabe 2: Es seien $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}, (b_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$, mit $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ beschränkt. Zeige $\lim_{n\to\infty} a_n b_n = 0$.

Aufgabe 3: Sei $q \in]0,1[$ und $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ eine Folge mit $a_1 \neq a_2$ und der folgenden Eigenschaft:

$$\forall_{n\in\mathbb{N}\setminus\{1\}} : |a_{n+1} - a_n| \leq q|a_n - a_{n-1}|.$$

Zeige, dass $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge ist.

Aufgabe 4: Betrachte die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ rekursiv definiert durch

$$a_0 = 0, \quad a_{n+1} = \frac{2}{3}a_n + \frac{1}{3}.$$

Bestimme den Grenzwert.

Aufgabe 5: Untersuche diese Reihen auf Konvergenz:

$$\sum_{n=1}^{\infty}(\ln(n+1) - \ln(n)), \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^4}{3^n}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^n, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^n}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2(n)}{n^4}.$$

Aufgabe 6: Bestimme den Grenzwert der Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n}.$$

Hinweis: Zeige zunächst

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{n}{2^n} = 2 - \frac{N+2}{2^N}.$$

Aufgabe 7: Es sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}\subset\mathbb{R}}$ beschränkt und $x \in]0,1[$. Zeige, dass $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ konvergiert.

Aufgabe 8: Es bezeichne $d(n)$ die Anzahl der Dezimalstellen einer natürlichen Zahl n (z. B. $d(15) = 2$). Untersuche die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{nd(n)}$$

auf Konvergenz.

Aufgabe 9: Betrachten Sie die Funktion $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}, x \mapsto f(x) := \ln(x)$. Finde eine Formel für die n-te Ableitung von f, $n \in \mathbb{N}$, und beweise sie mit einem Induktionsbeweis.

Aufgabe 10: Zeige, dass die Gleichung

$$x^4 = 1 + x$$

im Intervall $[1, \infty[$ genau eine Lösung hat.

Aufgabe 11: Es sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine stetig differenzierbare Funktion. Außerdem existiere ein $C \in \mathbb{R}_+$, sodass $|f'(x)| \leq C$ für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt. Zeige, dass dann f gleichmäßig stetig ist. *Hinweis:* Verwende den Mittelwertsatz der Differentialrechnung.

Aufgabe 12: Betrachte die Funktion

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto f(x) := \begin{cases} x, & \text{falls } x \geq 0, \\ \sin(x), & \text{sonst.} \end{cases}$$

Zeige, dass diese Funktion zweimal stetig differenzierbar ist. Existiert auch die dritte Ableitung dieser Funktion?

Aufgabe 13: Berechne den Wert der folgenden bestimmten Integrale:

$$\int_1^2 \frac{\cos(\ln(x))}{x} dx, \qquad \int_0^\pi \cos^2(x) \sin(x) dx.$$