Numerische Resultate

W. Bley
Institut für Mathematik der Universität Augsburg,
Universitätsstr. 8, D-86159 Augsburg, Deutschland

26. Juni 1996

Diese Arbeit stellt eine Ergänzung zu [Bl2] dar und beinhaltet eine ausführliche Beschreibung der dort erwähnten numerischen Resultate. Die verwendeten Algorithmen sind in [Bl,Bu], [Bl1] und [Bl2] ausführlich beschrieben, so daß wir uns hier auf die Implementation der Verfahren, sowie die Darstellung der numerischen Resultate konzentrieren wollen. Die Auswahl der berechneten Beispiele ist durch die Arbeit [Bu] von David Burns motiviert. Der interessierte Leser sei hierauf verwiesen, sowie auf die umfangreiche Literatur, die in der Einleitung zu [Bu] zitiert wird.
Im folgenden sei stets $K = \mathbf{Q}(\sqrt{-1})$. Für ein ganzes Ideal $\mathfrak{f}$ in K bezeichne $K(\mathfrak{f})$ den Strahlklassenkörper zum Führer $\mathfrak{f}$. Falls $\mathfrak{f}$ eine Potenz des Primideals $3\mathcal{O}_K$ist, so verzweigt $3\mathcal{O}_K$ voll in $K(\mathfrak{f})/K$ und wir bezeichnen in dieser Situation für jeden Zwischenkörper $K(\mathfrak{f})/F/K$ das eindeutige Primideal über der 3 mit $\mathfrak{p}_F$. Weiterhin übernehmen wir die sämtliche Notationen aus [Bl2].

Beispiel 1:
Die Erweiterung $K(9)/K$ ist vom Grad 18 und wir bezeichnen mit $L \subseteq K(9)$ den eindeutigen Zwischenkörper mit zu $C_3 \times C_3$ isomorpher Galoisgruppe $G = G(L/K)$. Aus [Bu], Lemma 2.5 und Proposition 1.8 folgt zusammen mit den numersichen Resultaten aus [Bl,Bu], daß die G-stabilen Ideale $\mathcal{O}_L, \mathfrak{p}_L, \mathfrak{p}_L^8$ lokal frei über ihren jeweiligen assoziierten Ordnungen in $K[G]$ sind. Wie unsere numerischen Betrachtungen zeigen werden, sind diese Ideale auch global frei. Man beachte insbesondere, daß $\mathfrak{p}_L$ isomorph zur Quadratwurzel der inversen Differente von L/K ist (siehe [Er,Ta]).

Beispiel 2:
Die Galoisgruppe der Erweiterung $K(27)/K$ ist vom Typ $C_2 \times C_9 \times C_9$. Es sei L der Fixkörper zu derjenigen Untergruppe, die von der C_2 und dem Frobeniusautomorphismus zu 10 erzeugt wird. Dann ist $G = G(L/K)$ nicht-zyklisch von der Ordnung 27 und voll verzweigt über der 3. Theoretische Überlegungen zeigen,

daß unter den Idealen $\mathfrak{p}_L^i, i = 0, \ldots, 26$, höchstens die $\mathfrak{p}_L^i$ mit $i \in \{8, 9, 10\}$ lokal frei über ihren assoziierten Ordnungen sind. Die expliziete Bestimmung von $\mathcal{A}_\theta(\mathfrak{p}_L^i)$ und $\mathcal{A}_K(\mathfrak{p}_L^i)$ ermöglicht nun die Berechnung der Indizes $[\mathcal{A}_\theta(\mathfrak{p}_L^i)\mathcal{M}_{K[G]} : \mathcal{A}_\theta(\mathfrak{p}_L^i)]_{\mathcal{O}_K}$ und $[\mathcal{M}_{K[G]} : \mathcal{A}_K(\mathfrak{p}_L^i)]_{\mathcal{O}_K}$, wobei $\theta \in \mathfrak{p}_L^i$ jeweils ein Normalbasiselement für L über $K[G]$ ist. Nach einem Resultat von Fröhlich ([Fr], Th. 4) ist $\mathcal{A}_\theta(\mathfrak{p}_L^i)$ (und damit $\mathfrak{p}_L^i$) dann und nur dann lokal frei über $\mathcal{A}_K(\mathfrak{p}_L^i)$, wenn diese Indizes übereinstimmen. Die numerischen Berechnungen zeigen nun, daß $\mathfrak{p}_L^i$ für $i \in \{8, 9, 10\}$ tatsächlich lokal frei ist. Dies zeigt insbesondere, daß in [Bu], Th.1.3(i), der Grundkörper $\mathbf{Q}_p$ nicht durch eine beliebige unverzweigte Erweiterung $E/\mathbf{Q}_p$ ersetzt werden kann (siehe auch [Bu], Remark 2.15).

Ein großer Teil der Implementation befaßt sich ausschließlich mit der Bereitstellung der Eingabedaten für die Algorithmen zur Berechnung der assoziierten Ordnungen. Folgende Daten werden benötigt:

- Eine $\mathcal{O}_K$-Basis $\omega_1, \ldots, \omega_9$ der betrachteten Ideale $\mathfrak{p}_L^i$, $i \in \{0, 1, 8\}$, im Beispiel 1, bzw. eine $\mathcal{O}_{K,(3)}$-Basis $\omega_1, \ldots, \omega_{27}$ von $\mathfrak{p}_L^i, i \in \{8, 9, 10\}$, im Beispiel 2. (Da es sich in Beispiel 2 um eine lokale Fragestellung handelt und L/K außerhalb der 3 höchstens zahm verweigt ist, genügt es die Lokalisierung nach der 3 zu betrachten.)
- Die von diesen Basiswahlen festgelegten Darstellungsmatrizen $A(\sigma) \in GL_n(\mathcal{O}_K)$ (bzw. $Gl_n(\mathcal{O}_{K,(3)})$, so daß gilt:

$$\begin{pmatrix} \omega_1 \\ \vdots \\ \omega_n \end{pmatrix}^\sigma = A(\sigma) \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \vdots \\ \omega_n \end{pmatrix}, \qquad \sigma \in G, n = [L : K].$$

Die Berechnung dieser Daten erfolgt unter Verwendung der expliziten Resultate von R. Schertz (siehe [Sch1], [Sch2]) über Potenzganzheitsbasen in Strahlklassenerweiterungen von imaginär-quadratischen Zahlkörpern (siehe auch [Bl,Bu], Abschnitt 5).
Für ein ganzes Ideal $\mathfrak{f} = \mathbf{Z}\omega_1 + \mathbf{Z}\omega_2$ in K mit $Im\frac{\omega_1}{\omega_2} > 0$ und $\xi \in K \setminus \mathfrak{f}$ sei

$$P(\xi\,|\mathfrak{f}) = \left(\frac{\wp(\xi\,|\mathfrak{f})}{(2\pi)^2 \eta(\frac{\omega_1}{\omega_2})^4 \omega_2^{-2}} \right)^2,$$

wobei $\wp$ die Weierstraßsche $\wp$-Funktion und η die Dedekindsche η-Funktion bezeichnet.
Wir wählen nun die Ideale $\mathfrak{f}$ und $\mathfrak{g}$, sowie $\delta, \xi \in K$ gemäß nachfolgender Tabelle

	$\mathfrak{f}$	$\mathfrak{g}$	δ	ξ	N
Beispiel 1	(3^2)	$\mathfrak{p}_2\mathfrak{p}_5 = (1+\sqrt{-1})(2+\sqrt{-1})$	$(1+\sqrt{-1})(2+\sqrt{-1})$	9	$K(9)$
Beispiel 2	(3^3)	$\mathfrak{p}_2\mathfrak{p}_5$	$(1+\sqrt{-1})(2+\sqrt{-1})$	27	$K(27)$

und setzen $\beta = (P(\delta\,|\mathfrak{f}\mathfrak{g}) - P(\xi\,|\mathfrak{f}\mathfrak{g}))^{-1}$. Dann erzeugt β eine Potenzganzheitsbasis von N/K und es gilt ferner: $\mathfrak{p}_N = (\beta)$.
Die Galoisgruppe $G(N/K)$ ist über die Artinabbildung isomorph zu $(\mathcal{O}_K/\mathfrak{f})^*/ < \sqrt{-1} >$ und daher leicht zu berechnen. Bezeichnen wir für $\alpha \in \mathcal{O}_K$, $(\mathfrak{f}, \alpha) = 1$, mit $\sigma(\alpha)$ den zugehörigen Frobeniusautomorphismus , so gilt:

$$\beta^{\sigma(\alpha)} = (P(\delta\alpha\,|\mathfrak{f}\mathfrak{g}) - P(\xi\alpha\,|\mathfrak{f}\mathfrak{g}))^{-1}.$$

Somit lassen sich durch die numerische Berechnung der singulären Werte der P-Funktion sämtliche Konjugierte von β berechnen. Zur Auswertung der P-Funktion wurden folgende q-Entwicklungen herangezogen:

$$\begin{aligned}
\wp\left(z \,\middle|\, \begin{matrix}\tau\\ 1\end{matrix}\right) &= 2\pi i \left(\frac{1}{12} + \sum_{m \in \mathbf{Z}} \frac{q_\tau^m q_z}{(1 - q_\tau^m q_z)^2} - 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n q_\tau^n}{1 - q_\tau^n} \right), \\
\eta(\tau) &= e^{2\pi i \tau/24} \left(1 + \sum_{1}^{\infty} (-1)^n \left(q_\tau^{n(3n-1)/2} + q_\tau^{n(3n+1)/2} \right) \right),
\end{aligned}$$

mit $q_\tau = e^{2\pi i\tau}$, $q_z = e^{2\pi i z}$, $|q_\tau| < |q_z| < 1/|q_\tau|$.
Da P elliptisch und homogen vom Grad 0 ist, reichen diese Formeln zur Berechnung der Funktionswerte aus.
Wir setzen nun $\pi = N_{N/L}(\beta)$ und erhalten damit einen Erzeuger des Hauptideals $\mathfrak{p}_L$. Im folgenden werden die numerischen Werte für die Konjugierten, sowie das Minimalpolynom von π aufgelistet, wobei hier nur die jeweils ersten 50 Stellen der berechneten Werte wiedergegeben werden. Tatsächlich wurde im Beispiel 1 mit einer Genauigkeit von 100 Stellen und im Beispiel 2 gar mit 200 Stellen gerechnet.
Beispiel 1:

$$\begin{aligned}
\pi^{\sigma_1} &= -0.027661116582152049162457599058099752858724307530 7 \\
&\quad -0.019171541173769996864279710742417688178082218454 5 * i \\
\pi^{\sigma_2} &= -0.55793414361405546235961491667940147213799834727 92 \\
&\quad -0.65316297966396176314626984947036847359013194461 10 * i \\
\pi^{\sigma_3} &= -0.02275804891249818281232907316307907789814753723 82 \\
&\quad +0.22487753747515117515397248713250965065676097666 61 * i \\
\pi^{\sigma_4} &= 2.092537858247835284548149863673161531320950309926 47 \\
&\quad -0.25999118714293388806988594151153091708540943279 29 * i \\
\pi^{\sigma_5} &= -8.75187808118489920899482613463985043349959132214 70 \\
&\quad +3.61776442292625116971875099092197487848879967461 93 * i \\
\pi^{\sigma_6} &= -2.69611270251863372116529072428401279712909538133 34 \\
&\quad +0.58619964915161419984688076739264656556019610362 77 * i \\
\pi^{\sigma_7} &= -0.54915163458446882016044602950674164756495180269 22
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
& +0.501680038997122812703151935221603102931460194714 2*i \\
\pi^{\sigma_8} &= -2.3597882545686779129486261359663688129964062647874 \\
& +2.8275135031854295438303834388745960898078191596007*i \\
\pi^{\sigma_9} &= -2.1272538762824499269445592503756075372360353469179 \\
& +2.1742905562450967468272958821809867914085874866301*i
\end{aligned}
$$

Das Minimalpolynom von π im Beispiel 1:

$$
\begin{aligned}
& x^9 + (15-9i)*x^8 + (36-90i)*x^7 + (-90-171i)*x^6 + (-171+252i)*x^5 \\
& +(333+828i)*x^4 + (567+756i)*x^3 + (441+261i)*x^2 + (81-36i)*x + 3
\end{aligned}
$$

Beispiel 2:

$$
\begin{aligned}
\pi^{\sigma_1} &= -0.0000551519390124864444027523463199486542554615 07+ \\
& +0.0000046908375028320383789404574091581958625412790*i \\
\pi^{\sigma_2} &= -0.0042641609204414554574458695219465166269792324 39+ \\
& +0.0010638441764132158936902710083949322643754836456*i \\
\pi^{\sigma_3} &= -0.0001655902003376950832030800183875411323538418 85 \\
& -0.0000565971735805157495662293782302672464969203 91*i \\
\pi^{\sigma_4} &= -0.0060180325567802374282976254936708858273523872 08 \\
& -0.0342806078430704881310142658577557711955365090 12*i \\
\pi^{\sigma_5} &= -1.7964797396779569326291572934206292578349637738 17 \\
& -0.7804232747413953086445786008959515741894728296 72*i \\
\pi^{\sigma_6} &= 0.2960389010638285132130680542559024796276814918863 \\
& -0.2544865172944578041302222930379580133311353338 14*i \\
\pi^{\sigma_7} &= -8.2547081032442573788943681412687548535964444798 63 \\
& -5.1149908281030759359341854174356696365843686895 51*i \\
\pi^{\sigma_8} &= -11.921146248779949781427320774314000907853993592 73 \\
& -6.0843704417059352362930366496583280091735305969 81*i \\
\pi^{\sigma_9} &= -46.262153716794576178837160029427731914749934372 61 \\
& +25.497717124367951517386849295930720846055098882267*i \\
\pi^{\sigma_{10}} &= 4.2921246416371093839911717015024465685746128612787 \\
& -70.221633534588122089253337042949067375227386802 05*i \\
\pi^{\sigma_{11}} &= -0.8746099706726856574373621851307272327562637063 94 \\
& -0.9292994966359375275169431250568281031899749604 52*i \\
\pi^{\sigma_{12}} &= 0.4311966839512391325636772321420779451947516547126 \\
& +1.9135276322607023740237699102032490060939160513853*i
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\pi^{\sigma_{13}} &= -2.36937932062912249119629447553553271925098696 4521 \\
&\quad +2.71453419493073252783232087552479564509062631 20185 * i \\
\end{aligned}
$$

$$\begin{aligned}
c_3 &= 75051026361 - 12695272677 * i,\\
c_4 &= 1505297430900 - 2628067717611 * i,\\
c_5 &= -7984107971685 - 37871739693225 * i,\\
c_6 &= -28918315377108 + 7520297349411 * i,\\
c_7 &= -196561245907143 + 13963147232427 * i,\\
c_8 &= -308815282456623 + 110747291873679 * i,\\
c_9 &= -18804095601129 + 369471345997086 * i,\\
c_{10} &= 228681214179210 + 582845239515006 * i,\\
c_{11} &= 305400843457398 + 961205437147248 * i,\\
c_{12} &= 266853466273635 + 840598142223672 * i,\\
c_{13} &= 2479663635840 + 581460744113073 * i,\\
c_{14} &= -56133171518121 + 314554545568719 * i,\\
c_{15} &= -54922950730701 + 107541011842344 * i,\\
c_{16} &= -27575733826296 + 28710115162038 * i,\\
c_{17} &= -8133215322420 + 4575878534844 * i,\\
c_{18} &= -1674559608948 + 651174109974 * i,\\
c_{19} &= -273687165306 - 63796239594 * i,\\
c_{20} &= -26099532414 - 27821404440 * i,\\
c_{21} &= -900574218 - 3570982992 * i,\\
c_{22} &= 33510357 - 172900134 * i,\\
c_{23} &= 5201244 - 2173023 * i,\\
c_{24} &= 129156 + 79155 * i,\\
c_{25} &= 3969 + 3789 * i,\\
c_{26} &= 81 + 45 * i,\\
c_{27} &= 1.
\end{aligned}$$

Im weiteren unterscheidet sich der Rechengang zwischen den Beispielen 1 und 2, da es im letzteren nur auf die Lokalisierung nach dem Primideal $3\mathcal{O}_K$ ankommt, im ersteren jedoch alle Rechnungen global durchgeführt werden müssen. Wir beschreiben zunächst die Implementation des ersten Beispiels.
Unser erstes Ziel ist die Konstruktion einer Basis von $\mathfrak{p}_L^i$, $i = 0, \ldots, 8$, über $\mathcal{O}_K$. Dazu verschaffen wir uns zuerst ein Erzeugendensystem von $\mathfrak{p}_L^i$. Die Differente $D_{K(9)/L}$ ist durch $\mathfrak{p}_{K(9)}$ gegeben. Wegen

$$\begin{aligned}
& Tr_{K(9)/L}(\mathfrak{p}_{K(9)}^k) \subseteq \mathfrak{p}_L^i\\
\iff\quad & \mathfrak{p}_{K(9)}^{k-2i} \subseteq D_{K(9)/L}^{-1} = \mathfrak{p}_{K(9)}^{-1}\\
\iff\quad & i \leq \left[\frac{k+1}{2}\right]
\end{aligned}$$

ist ein Erzeugendensystem von $\mathfrak{p}_L^i$ durch die Elemente

$$\vartheta_j = Tr_{K(9)/L}(\beta^{k(i)+j}), \quad j = 0, \ldots, 17, \quad k(i) = \begin{cases} 0, & \text{falls } i = 0, \\ 2i-1, & \text{falls } i > 0, \end{cases}$$

gegeben.
Als nächstes berechnen wir die Matrix $S \in K^{9\times 18}$, so daß gilt:

$$(\vartheta_0, \ldots, \vartheta_{17}) = (\pi^{\sigma_1}, \ldots, \pi^{\sigma_9})\, S. \tag{1}$$

Dabei schreiben wir hier und auch im Rest der Arbeit stets $G = \{\sigma_1, \ldots, \sigma_9\}$.
Zur Berechnung der j-ten Spalte von S setzen wir zunächst

$$\vartheta_j = \sum_{s=1}^{9} x_s \pi^{\sigma_s}$$

mit Unbekannten x_s an. Hierauf wenden wir die Automorphismen $\sigma_t \in G(L/K)$ an und erhalten ein lineares Gleichungssystem

$$\vartheta_j^{\sigma_t} = \sum_{s=1}^{9} x_s \pi^{\sigma_s \sigma_t}, 1 \leq s, t \leq 9,$$

d.h. es ist

$$\underbrace{(\pi^{\sigma_s\sigma_t})_{t,s}}_{=:M} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vartheta_j^{\sigma_1} \\ \vdots \\ \vartheta_j^{\sigma_9} \end{pmatrix}$$

für $j = 0, \ldots, 17$ zu berechnen. Damit lassen sich die Einträge der Matrix S als komplexe Näherungen genügend genau berechnen. Da die weiteren Rechnungen jedoch exaxt durchgeführt werden sollen, werden wir diese Einträge nun auf die Form $(x + y\sqrt{-1})/d$ mit $x, y, d \in \mathbf{Z}, d > 0$,bringen. Dazu berechnen wir den Index

$$d = [\mathcal{O}_L : \mathcal{O}_K[G]\pi]_{\mathcal{O}_K} = \left(\frac{det(M)^2}{d_{L/K}}\right)^{1/2} = \left(\frac{det(M)^2}{3^{16}}\right)^{1/2} = \frac{det(M)}{3^8}.$$

Hierfür gilt dann $dS \in \mathcal{O}_K^{9\times 18}$ und die Einträge lassen sich problemlos runden.
Es sei nun $d_1 \in \mathcal{O}_K$ das kleinste gemeinsame Vielfache aller Nenner der Koeffizienten von S. Um nun aus (1) eine Basis von $\mathfrak{p}_L^i$ zu konstruieren, berechnen wir die Hermitesche Normalform der Matrix $d_1 S$ und bezeichnen diese mit $H = H(d_1 S) = (H_1, 0)$, $H_1 \in \mathcal{O}_K^{9\times 9}$. Dann ist durch die Komponenten des Vektors

$$\frac{1}{d_1}(\pi^{\sigma_1}, \ldots, \pi^{\sigma_9}) H_1 \tag{2}$$

eine Basis $\omega_1, \ldots, \omega_9$ von $\mathfrak{p}_L^i$ gegeben und die davon induzierten Darstellungsmatrizen $A(\sigma_s)$ berechnen sich aus

$$A(\sigma_s) = H_1^t B(\sigma_s)(H_1^t)^{-1},$$

wobei wir mit $B(\sigma_s)$ die reguläre Darstellung bezüglich der kanonischen Basis $\sigma_1, \ldots, \sigma_9$ bezeichnen.

Obwohl die Berechnung der Hermiteschen Normalform vom theoretischen Standpunkt aus gesehen völlig trivial ist (man beachte, daß $\mathcal{O}_K$ euklidisch ist), stößt man doch rasch und insbesondere auch in diesem Fall auf erhebliche numerische Schwierigkeiten. Daher ist es unbedingt nötig eine "modulo D"-Technik anzuwenden (siehe [Co], §2.4.2). Bezeichnen wir mit W das von den Spalten von $d_1 S$ über $\mathcal{O}_K$ aufgespannte Gitter im K^9, so folgt wegen $9\pi^{\sigma_s} \in \mathfrak{p}_L^i$, $s = 1, \ldots, 9$ aus (1), daß $9d_1$ eine obere Schranke (bezüglich der Teilbarkeit) für den Exponenten von $\mathcal{O}_K^9/W$ ist.

Im folgenden werden die Matrizen H_1, sowie deren Hauptnenner d_1, für $i \in \{0, 1, 8\}$ aufgelistet. Die Komponenten der Form $(a, b) \in \mathbf{Z}^2$ sind dabei als Koordinaten bezüglich der Basis $1, \sqrt{-1}$ zu interpretieren; (a, b) entspricht also $a + b\sqrt{-1}$.

Der Fall $i = 0$: $d_1 = 3563166$

$$H_1 =$$
$$\begin{pmatrix}
(801,739) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
(801,739) & (196860,177174) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
(355149,-392981) & (-196860,-177174) & (0,-3563166) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
(602397,-458465) & (1240218,-1378020) & 0 & (0,-3563166) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
(-1062345,-1349333) & (-1043358,1555194) & 0 & 0 & (0,-3563166) & 0 & 0 & 0 & 0 \\
(1409523,624265) & (-1240218,1378020) & 0 & 0 & 0 & (0,-3563166) & 0 & 0 & 0 \\
(-1515123,737383) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & (0,-3563166) & 0 & 0 \\
(1409523,624265) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & (0,-3563166) & 0 \\
(-1515123,737383) & (1043358,-1555194) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & (0,-3563166)
\end{pmatrix}$$

Der Fall $i = 1$: $d_1 = 1187722$

$$H_1 =$$
$$\begin{pmatrix}
(801,739) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
(801,739) & (59058,-65620) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
(355149,-392981) & (-59058,65620) & (0,-1187722) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
(-585325,-458465) & (-459340,-413406) & 0 & (0,-1187722) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
(125377,-161611) & (518398,347786) & 0 & 0 & (0,-1187722) & 0 & 0 & 0 & 0 \\
(221801,-563457) & (459340,413406) & 0 & 0 & 0 & (0,-1187722) & 0 & 0 & 0 \\
(-327401,-450339) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & (0,-1187722) & 0 & 0 \\
(221801,-563457) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & (0,-1187722) & 0 \\
(-327401,-450339) & (-518398,-347786) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & (0,-1187722)
\end{pmatrix}$$

Der Fall $i = 8$: $d_1 = 1187722$

$$H_1 =$$

$$
\begin{pmatrix}
(801,739) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
(801,739) & (59058,-65620) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
(355149,-392981) & (-59058,65620) & (0,-3563166) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
(602397,-458465) & (-459340,-1601128) & 0 & (0,-3563166) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
(-1062345,-1349333) & (518398,1535508) & 0 & 0 & (0,-3563166) & 0 & 0 & 0 & 0 \\
(1409523,624265) & (1647062,413406) & 0 & 0 & 0 & (0,-3563166) & 0 & 0 & 0 \\
(-1515123,737383) & (1187722,-1187722) & 0 & 0 & 0 & 0 & (0,-3563166) & 0 & 0 \\
(1409523,624265) & (-1187722,1187722) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & (0,-3563166) & 0 \\
(-1515123,737383) & (-1706120,-347786) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & (0,-3563166)
\end{pmatrix}
$$

Für den Algorithmus zur Berechnung der assoziierten Ordnungen benötigen wir zunächst einen Normalbasiserzeuger $\theta \in \mathfrak{p}_L^i$. Obwohl ein solches Element auf einfache Weise algorithmisch berechnet werden kann (siehe [Gi] oder [Bl2]), wurde an dieser Stelle nur geraten. Tatsächlich stellt man fest, daß "nahezu alle" Elemente eine Normalbasis erzeugen. Für die weiteren Rechnungen setzen wir mehr oder weniger willkürlich

$$\theta = 9(\omega_3 + \omega_8),$$

wobei durch den zusätzlichen Faktor 9 gewährleistet wird, daß $\mathcal{A}_\theta(\mathfrak{p}_L^i)$ in der Maximalordnung enthalten ist.
Da der Algorithmus zur Berechnung von $\mathcal{A}_K(\mathfrak{p}_L^i)$ und $\mathcal{A}_\theta(\mathfrak{p}_L^i)$ bereits in [Bl,Bu] ausführlich beschrieben ist, begnügen wir uns hier mit der Darstellung der Ergebnisse. Die angegebenen Gruppenringelemente $\lambda_1, \ldots, \lambda_9$ stellen dabei stets eine $\mathcal{O}_K$-Basis der jeweiligen Moduln dar.
Die assoziierte Ordnung für $i = 0$:

$$
\begin{aligned}
\lambda_1 &= \frac{-i}{3} * \sigma_1 + \frac{2i}{3} * \sigma_2 + \frac{2i}{3} * \sigma_3 + \frac{2i}{3} * \sigma_4 + \frac{2i}{3} * \sigma_5 \\
&\quad + \frac{2i}{3} * \sigma_6 + \frac{2i}{3} * \sigma_7 + \frac{2i}{3} * \sigma_8 + \frac{2i}{3} * \sigma_9, \\
\lambda_2 &= \sigma_2, \lambda_3 = \sigma_3, \lambda_4 = \sigma_4, \\
\lambda_5 &= \sigma_5, \lambda_6 = \sigma_6, \lambda_7 = \sigma_7, \\
\lambda_8 &= \sigma_8, \lambda_9 = \sigma_9.
\end{aligned}
$$

Es folgt $\mathcal{A}_\theta(\mathfrak{p}_L^i)$ für $i = 0$:

$$
\begin{aligned}
\lambda_1 &= \frac{801 + 739i}{64136988} * \sigma_1 + \frac{61972329 + 44372983i}{64136988} * \sigma_2 \\
&\quad + \frac{9646941 + 22934929i}{64136988} * \sigma_3 + \frac{47533821 + 21826087i}{64136988} * \sigma_4 \\
&\quad + \frac{31793589 + 56370019i}{64136988} * \sigma_5 + \frac{29304585 + 17534539i}{64136988} * \sigma_6 \\
&\quad + \frac{5611209 + 22116379i}{64136988} * \sigma_7 + \frac{19225353 + 43382257i}{64136988} * \sigma_8
\end{aligned}
$$

$$+\frac{19076433+10718185i}{64136988}*\sigma_9$$

$$\lambda_2 = \frac{10+9i}{3258}*\sigma_2+\frac{3067+534i}{3258}*\sigma_3+\frac{1330+111i}{3258}*\sigma_4 +\frac{323+345i}{543}*\sigma_5+\frac{1507+1302i}{1629}*\sigma_6+\frac{4+3i}{18}*\sigma_7 +\frac{1+12i}{18}*\sigma_8+\frac{1501+1188i}{3258}*\sigma_9$$

$$\lambda_3 = \frac{-i}{18}*\sigma_3+\frac{3+2i}{9}*\sigma_4+\frac{i}{3}*\sigma_5 +\frac{3+2i}{9}*\sigma_6+\frac{3+8i}{9}*\sigma_7+\frac{5i}{18}*\sigma_8 +\frac{6+17i}{18}*\sigma_9$$

$$\lambda_4 = \frac{-i}{9}*\sigma_4+\frac{6+7i}{9}*\sigma_5+\frac{7+i}{9}*\sigma_6 +\frac{8}{9}*\sigma_7+\frac{8+8i}{9}*\sigma_8+\frac{5i}{9}*\sigma_9$$

$$\lambda_5 = \frac{-i}{9}*\sigma_5+\frac{2}{9}*\sigma_6+\frac{6+8i}{9}*\sigma_7 +\frac{1+7i}{9}*\sigma_8+\frac{5+6i}{9}*\sigma_9$$

$$\lambda_6 = \frac{-i}{9}*\sigma_6+\frac{5+5i}{9}*\sigma_7+\frac{2+2i}{3}*\sigma_8+\frac{8+3i}{9}*\sigma_9$$

$$\lambda_7 = \frac{-i}{9}*\sigma_7+\frac{i}{9}*\sigma_8+\frac{i}{9}*\sigma_9$$

$$\lambda_8 = \frac{-i}{9}*\sigma_8+\frac{2+i}{3}*\sigma_9$$

$$\lambda_9 = \frac{-i}{9}*\sigma_9$$

Die assoziierte Ordnung für $i = 1$:

$\lambda_1 = \sigma_1, \lambda_2 = \sigma_2, \lambda_3 = \sigma_3, \lambda_4 = \sigma_4, \lambda_5 = \sigma_5, \lambda_6 = \sigma_6, \lambda_7 = \sigma_7, \lambda_8 = \sigma_8, \lambda_9 = \sigma_9.$

Und hier $\mathcal{A}_\theta(\mathfrak{p}_L^i)$ für $i = 1$:

$$\lambda_1 = \frac{801+739i}{21378996}*\sigma_1+\frac{1679961+904909i}{2375444}*\sigma_2+\frac{735033+1954829i}{2375444}*\sigma_3 +\frac{198173+727021i}{2375444}*\sigma_4+\frac{16438509+6918787i}{21378996}*\sigma_5 +\frac{3791529+748943i}{21378996}*\sigma_6+\frac{2207097+741777i}{2375444}*\sigma_7$$

$$
\begin{aligned}
& +\frac{552521+333301i}{2375444} * \sigma_8 + \frac{658465+2198541i}{2375444} * \sigma_9 \\
\lambda_2 &= \frac{9-10i}{3258} * \sigma_2 + \frac{90+81i}{181} * \sigma_3 \\
& +\frac{1197+118i}{3258} * \sigma_4 + \frac{854+1565i}{1629} * \sigma_5 + \frac{940+665i}{1629} * \sigma_6 \\
& +\frac{7+12i}{18} * \sigma_7 + \frac{66+168i}{181} * \sigma_9 \\
\lambda_3 &= \frac{-i}{18} * \sigma_3 + \frac{7}{9} * \sigma_5 + \frac{5+2i}{9} * \sigma_6 + \frac{i}{18} * \sigma_8 + \frac{17i}{18} * \sigma_9 \\
\lambda_4 &= \frac{-i}{9} * \sigma_4 + \frac{3+2i}{9} * \sigma_5 + \frac{1+i}{9} * \sigma_6 + \frac{4+8i}{9} * \sigma_7 + \frac{1}{3} * \sigma_8 + \frac{4+7i}{9} * \sigma_9 \\
\lambda_5 &= \frac{-i}{9} * \sigma_5 + \frac{7+7i}{9} * \sigma_6 \\
\lambda_6 &= \frac{-i}{9} * \sigma_6 \\
\lambda_7 &= \frac{-i}{9} * \sigma_7 + \frac{4+4i}{9} * \sigma_8 + \frac{3+2i}{9} * \sigma_9 \\
\lambda_8 &= \frac{-i}{9} * \sigma_8 + \frac{1+5i}{9} * \sigma_9 \\
\lambda_9 &= \frac{-i}{9} * \sigma_9
\end{aligned}
$$

Zuletzt der Fall $i = 8$. Hier die assoziierte Ordnung:

$$
\begin{aligned}
\lambda_1 &= \frac{-i}{3} * \sigma_1 + \frac{i}{3} * \sigma_3 \\
& +\frac{1}{3} * \sigma_4 + \frac{2+2i}{3} * \sigma_5 + \frac{1+2i}{3} * \sigma_6 \\
& +\frac{2}{3} * \sigma_7 + \frac{1+i}{3} * \sigma_8 + \frac{2+i}{3} * \sigma_9, \\
\lambda_2 &= \frac{-i}{3} * \sigma_2 + \frac{i}{3} * \sigma_3 + \frac{2+2i}{3} * \sigma_4 \\
& +\frac{1}{3} * \sigma_5 + \frac{2}{3} * \sigma_6 + \frac{1+2i}{3} * \sigma_7 + \frac{2+i}{3} * \sigma_8 + \frac{1+i}{3} * \sigma_9, \\
\lambda_3 &= \sigma_3, \lambda_4 = \sigma_4, \lambda_5 = \sigma_5, \lambda_6 = \sigma_6, \lambda_7 = \sigma_7, \lambda_8 = \sigma_8, \lambda_9 = \sigma_9.
\end{aligned}
$$

$\mathcal{A}_\theta(\mathfrak{p}_L^i)$ für $i = 8$:

$$
\begin{aligned}
\lambda_1 &= \frac{801+739i}{64136988} * \sigma_1 + \frac{63022249+12061695i}{64136988} * \sigma_2 \\
& +\frac{33539183+37430387i}{64136988} * \sigma_3 + \frac{25642989+38231087i}{64136988} * \sigma_4
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
& +\frac{33355345+21906395i}{64136988}*\sigma_5+\frac{25065533+8255871i}{64136988}*\sigma_6 \\
& +\frac{7986653+7863715i}{64136988}*\sigma_7+\frac{48918403+32692759i}{64136988}*\sigma_8 \\
& +\frac{18111353+9121993i}{21378996}*\sigma_9, \\
\lambda_2 \quad = \quad & \frac{9-10i}{9774}*\sigma_2+\frac{5964+9241i}{9774}*\sigma_3+\frac{6989+5186i}{9774}*\sigma_4 \\
& +\frac{1940+1746i}{4887}*\sigma_5+\frac{940+2475i}{4887}*\sigma_6+\frac{13+14i}{54}*\sigma_7 \\
& +\frac{14+49i}{54}*\sigma_8+\frac{2998+2119i}{9774}*\sigma_9, \\
\lambda_3 \quad = \quad & \frac{-i}{18}*\sigma_3+\frac{5i}{9}*\sigma_4+\frac{2+2i}{3}*\sigma_5+\frac{7+2i}{9}*\sigma_6 \\
& +\frac{i}{9}*\sigma_7+\frac{4+17i}{18}*\sigma_8+\frac{6+i}{18}*\sigma_9, \\
\lambda_4 \quad = \quad & \frac{-i}{9}*\sigma_4+\frac{1+7i}{9}*\sigma_5+\frac{4+5i}{9}*\sigma_6+\frac{7i}{9}*\sigma_7 \\
& +\frac{5+2i}{9}*\sigma_8+\frac{3+7i}{9}*\sigma_9, \\
\lambda_5 \quad = \quad & \frac{-i}{9}*\sigma_5+\frac{5+8i}{9}*\sigma_6+\frac{2+2i}{3}*\sigma_7+\frac{4+5i}{9}*\sigma_8+\frac{2+5i}{9}*\sigma_9, \\
\lambda_6 \quad = \quad & \frac{-i}{9}*\sigma_6+\frac{8+5i}{9}*\sigma_7+\frac{2+3i}{9}*\sigma_8+\frac{3+i}{9}*\sigma_9, \\
\lambda_7 \quad = \quad & \frac{-i}{9}*\sigma_7+\frac{4+8i}{9}*\sigma_8+\frac{1}{9}*\sigma_9, \\
\lambda_8 \quad = \quad & \frac{-i}{9}*\sigma_8+\frac{4+8i}{9}*\sigma_9, \\
\lambda_9 \quad = \quad & \frac{-i}{9}*\sigma_9.
\end{aligned}
$$

Wir kommen nun zur Berechnung eines galoiserzeugenden Elements und gehen dabei wie in [Bl1] beschrieben vor.
Die Charakterwerte eines jeden nicht-trivialen linearen Charakters χ von G erzeugen den Kreiskörper $M = \mathbf{Q}(\zeta_{12})$. Es sei $G =< \sigma > \times < \tau >$. Dann ist die Wedderburnzerlegung von $K[G]$ explizit durch

$$
\begin{aligned}
\Phi : K[G] \quad &\longrightarrow \quad K \oplus M \oplus M \oplus M \oplus M \\
\sigma \quad &\longmapsto \quad (1, 1, \zeta_3, \zeta_3, \zeta_3) \\
\tau \quad &\longmapsto \quad (1, \zeta_3, 1, \zeta_3, \zeta_3^2)
\end{aligned}
$$

gegeben.

Die Idealklassengruppe von M ist bekannterweise trivial und als Basis von $\mathcal{O}_M$ über $\mathcal{O}_K$ wählen wir $1, \zeta_3$. Bezeichnen wir mit $\chi_{ij}, 0 \leq i,j \leq 2$ den eindeutigen Charakter mit $\sigma \mapsto \zeta_3^i, \tau \mapsto \zeta_3^j$ und schreiben e_{ij} für das gewöhnliche Idempotent zu χ_{ij}, so bilden die Elemente $e_1 = e_{00}$, $e_2 = e_{01} + e_{02}$, $e_3 = e_{10} + e_{20}$, $e_4 = e_{11} + e_{22}$, $e_5 = e_{12} + e_{21}$ ein System von orthogonalen, primitiven $K[G]$-Idempotenten. Die Maximalordnung $\mathcal{M}_{K[G]}$ wird über $\mathcal{O}_K$ durch die Elemente $e_1, e_2, \tau e_2, e_3, \sigma e_3, e_4, \sigma e_4, e_5, \sigma e_5$ erzeugt. Die Berechnug der Indizes $(\alpha_1) = [\mathcal{A}_\theta(\mathfrak{p}_L^i)e_1 : \mathcal{A}_K(\mathfrak{p}_L^i)e_1]_{\mathcal{O}_K}$ bzw. $(\alpha_j) = [\mathcal{A}_\theta(\mathfrak{p}_L^i)e_j : \mathcal{A}_K(\mathfrak{p}_L^i)e_j]_{\mathcal{O}_M}, j = 2, \ldots, 5$, sowie von $[\mathcal{A}_\theta(\mathfrak{p}_L^i) : \mathcal{A}_K(\mathfrak{p}_L^i)]_{\mathcal{O}_K}$ liefert nun die folgenden Resultate
Der Fall $i = 0$:

$$\begin{aligned}
\alpha_1^{-1} &= (-3+5i)/612,\\
\alpha_2^{-1} &= (12 - 16\zeta_{12} - 55\zeta_{12}^2 + 9\zeta_{12}^3)/1737,\\
\alpha_3^{-1} &= (-27 + 8\zeta_{12} - 29\zeta_{12}^2 + 22\zeta_{12}^3)/1629,\\
\alpha_4^{-1} &= (27 - 22\zeta_{12} - 56\zeta_{12}^2 - 8\zeta_{12}^3)/3258,\\
\alpha_5^{-1} &= -1/9.
\end{aligned}$$

$$[\mathcal{A}_\theta(\mathfrak{p}_L^i) : \mathcal{A}_K(\mathfrak{p}_L^i)]_{\mathcal{O}_K} = 45247613751288 + 4212035556408i$$

Der Fall $i = 1$:

$$\begin{aligned}
\alpha_1^{-1} &= (-3+5i)/612,\\
\alpha_2^{-1} &= (12 - 16\zeta_{12} - 55\zeta_{12}^2 + 9\zeta_{12}^3)/1737,\\
\alpha_3^{-1} &= (-27 + 8\zeta_{12} - 29\zeta_{12}^2 + 22\zeta_{12}^3)/1629,\\
\alpha_4^{-1} &= (27 - 22\zeta_{12} - 56\zeta_{12}^2 - 8\zeta_{12}^3)/3258,\\
\alpha_5^{-1} &= -1/9.
\end{aligned}$$

$$[\mathcal{A}_\theta(\mathfrak{p}_L^i) : \mathcal{A}_K(\mathfrak{p}_L^i)]_{\mathcal{O}_K} = -4212035556408 + 45247613751288i.$$

Der Fall $i = 8$:

$$\begin{aligned}
\alpha_1^{-1} &= (-3+5i)/612,\\
\alpha_2^{-1} &= (12 - 16\zeta_{12} - 55\zeta_{12}^2 + 9\zeta_{12}^3)/1737,\\
\alpha_3^{-1} &= (-27 + 8\zeta_{12} - 29\zeta_{12}^2 + 22\zeta_{12}^3)/1629,\\
\alpha_4^{-1} &= (27 - 22\zeta_{12} - 56\zeta_{12}^2 - 8\zeta_{12}^3)/3258,\\
\alpha_5^{-1} &= -1/9.
\end{aligned}$$

$$[\mathcal{A}_\theta(\mathfrak{p}_L^i) : \mathcal{A}_K(\mathfrak{p}_L^i)]_{\mathcal{O}_K} = -4212035556408 + 45247613751288i.$$

Man verifiziert nun verifiziert die Gleichheit

$$\left[\mathcal{A}_\theta(\mathfrak{p}_L^i)\mathcal{M}_{K[G]} : \mathcal{M}_{K[G]}\right]_{\mathcal{O}_K} = \left[\mathcal{A}_\theta(\mathfrak{p}_L^i) : \mathcal{A}_K(\mathfrak{p}_L^i)\right]_{\mathcal{O}_K},$$

wobei die linke Seite durch $\alpha_1 \prod_{j=1}^4 N_{M/K}(\alpha_j)$ gegeben ist. Nach dem Kriterium von Fröhlich liefert dies nochmals den (numersichen) Nachweis, daß $\mathfrak{p}_L^i$ für $i \in \{0,1,8\}$ lokal frei über seiner assoziierten Ordnung ist.
Wir sind nun endlich bei unserem eigentlichen Problem, der Frage nach der globalen Freiheit von $\mathcal{A}_\theta(\mathfrak{p}_L^i)$ (und damit von $\mathfrak{p}_L^i$) über $\mathcal{A}_K(\mathfrak{p}_L^i)$, angelangt. Dazu wenden wir Theorem 2.8 und Lemma 2.9 aus [Bl1] an.
Es sei R ein Vertretersystem von $im\,(\mathcal{O}_M^* \to (\mathcal{O}_M/9)^*)$. Da M den Einheitenrang 1 hat, ist R leicht zu berechnen und man erhält $|R| = 216$.
Wir bestimmen nun eine untere Dreiecksmatrix $S \in \mathcal{O}_K^{9\times 9}$, so daß für eine neue Basis $\lambda_1', \ldots, \lambda_9'$ von $\mathcal{A}_\theta(\mathfrak{p}_L^i)$ gilt:

$$(e_1, e_2, \tau e_2, e_3, \sigma e_3, e_4, \sigma e_4, e_5, \sigma e_5) = (\lambda_1', \ldots, \lambda_9')S. \qquad (3)$$

Dazu gehen wir folgendermaßen vor: wir bestimmen zuerst die Matrix $A \in K^{9\times 9}$ mit

$$(e_1, e_2, \tau e_2, e_3, \sigma e_3, e_4, \sigma e_4, e_5, \sigma e_5)A = (\lambda_1, \ldots, \lambda_9),$$

sowie deren Hauptnenner d. Sodann berechnen wir die Hermitesche Normalform H von dA. Dann gilt $H = dAU$ mit einer Matrix $U \in Gl_9(\mathcal{O}_K)$ und daher

$$(e_1, e_2, \tau e_2, e_3, \sigma e_3, e_4, \sigma e_4, e_5, \sigma e_5) = (\lambda_1, \ldots, \lambda_9)U \cdot dH^{-1}.$$

Setzt man also $S = dH^{-1}$, so ist damit (3) erfüllt. Da im weiteren die Basiselemente $\lambda_1', \ldots, \lambda_9'$ nicht benötigt werden, ist auch die Kenntnis von U nicht erforderlich. Man beachte auch, daß S tatsächlich ganzzahlige Einträge hat, da nach unserer Wahl von θ die Inklusion $\mathcal{M}_{K[G]} \subseteq \mathcal{A}_\theta(\mathfrak{p}_L^i)$ gilt.
In der abschließenden Enumeration ist nun für alle Tupel $(\alpha_1^{-1}, \alpha_2^{-1}\nu_2, \ldots, \alpha_5^{-1}\nu_5)$ mit $\nu_2, \ldots, \nu_5 \in R$ zu testen, ob das Urbild unter Φ in $\mathcal{A}_\theta(\mathfrak{p}_L^i)$ enthalten ist. Dazu schreiben wir $\alpha_j^{-1}\nu_j = b_{j,1} + b_{j,2}\zeta_3$ mit $b_{j,1}, b_{j,2} \in K$ und setzen $b = (\alpha_1^{-1}, b_{1,1}, b_{1,2}, \ldots, b_{5,1}, b_{5,2})^t$. Dann gilt:

$$\lambda^{-1} := \Phi^{-1}(\alpha_1^{-1}, \alpha_2^{-1}\nu_2, \ldots, \alpha_5^{-1}\nu_5) \in \mathcal{A}_\theta(\mathfrak{p}_L^i) \Longleftrightarrow S \cdot b \in \mathcal{O}_K^9.$$

Da S eine untere Dreiecksmatrix ist, kann dieser Test sukzessive durchgeführt werden, wodurch eine vollständige Enumeration erst ermöglicht wird.
Es folgen nun die berechneten Gruppenringelemente $\lambda^{-1} \in \mathcal{A}_\theta(\mathfrak{p}_L^i)$, sowie die Minimalpolynome $m(x)$ der $\lambda^{-1}(\theta)$, wobei wir $m(x) = x^9 + \sum_{i=0}^8 c_i x^i$ schreiben. Es sind hier, wie bereits bei der Darstellung der Konjugierten von π, nur die

ersten 50 Dezimalstellen angegeben, obwohl tatsächlich miit einer Genauigkeit von 100 Stellen gerechnet wurde.
Der Fall $i = 0$:

$$\begin{aligned}
\lambda^{-1} = {} & ((22297804651 - 92592162909i) * \sigma_1 + (69038418815 + 65606521377i) * \sigma_2 \\
& +(-91335975315 + 26985732575i) * \sigma_3 + (69127031995 + 65611422137i) * \sigma_4 \\
& +(22341933251 - 92673902513i) * \sigma_5 + (22257343291 - 92671360741i) * \sigma_6 \\
& +(69086878335 + 65685458905i) * \sigma_7 + (-91384717919 + 27060374271i) * \sigma_8 \\
& +(-91428821903 + 26988091563i) * \sigma_9)/21378996
\end{aligned}$$

Die Koeffizienten des Minimalpolynoms:

$$\begin{aligned}
c_0 = {} & -21316500474993793399145199105536327941519612726100694.0000 \\
& +437800082160800949677697488006450111382766809.00000000000 * i \\
c_1 = {} & -230772506698437262444778517805267215.00000000000000000000 \\
& +399245652659362540614820799999726204.99999999999999999999 * i \\
c_2 = {} & -115344433403294526856649978343461303.99999999999999999999 \\
& +199695326806626535124759015295601410.00000000000000000000 * i \\
c_3 = {} & -115319267414552694094821809960231987.99999999999999999999 \\
& +199738827095711554981970270197909965.00000000000000000000 * i \\
c_4 = {} & 833203592143992836.99999999999999999999999999999999999999 \\
& +1440745079627188962.0000000000000000000000000000000000000 * i \\
c_5 = {} & 831633514311304089.00000000000000000000000000000000000000 \\
& +1440745160302976849.9999999999999999999999999999999999999 * i \\
c_6 = {} & 415907312899131351.00000000000000000000000000000000000000 \\
& +720372619959247547.99999999999999999999999999999999999999 * i \\
c_7 = {} & 0.0000000000000000000000000000000000000000000000000000000 \\
& +0.0000000000000000000000000000000000000000000000000000000 * i \\
c_8 = {} & 2.9999999999999999999999999999999999999999999999999999999 \\
& +0.0000000000000000000000000000000000000000000000000000000 * i
\end{aligned}$$

Der Fall $i = 1$:

$$\begin{aligned}
\lambda^{-1} = {} & ((22297804651 - 92592162909i) * \sigma_1 + (69038418815 + 65606521377i) * \sigma_2 \\
& +(-91335975315 + 26985732575i) * \sigma_3 + (69127031995 + 65611422137i) * \sigma_4 \\
& +(22341933251 - 92673902513i) * \sigma_5 + (22257343291 - 92671360741i) * \sigma_6 \\
& +(69086878335 + 65685458905i) * \sigma_7 + (-91384717919 + 27060374271i) * \sigma_8 \\
& +(-91428821903 + 26988091563i) * sigma_9/21378996
\end{aligned}$$

Die Koeffizienten des Minimalpolynoms:

$$
\begin{aligned}
c_0 &= -2131650047499379339914519910553632794151961272610069 4.000 \\
&\quad +43780008216080094967769748800645011138276680 9.0000000000 * i \\
c_1 &= -2307725066984372624447785178052672 15 \\
&\quad +39924565265936254061482079999972620 4.9999999999999999999 * i, \\
c_2 &= -11534443340329452685664997834346130 3.9999999999999999999 \\
&\quad +19969532680662653512475901529560140 9.9999999999999999999 * i, \\
c_3 &= -11531926741455269409482180996023198 7.9999999999999999999 \\
&\quad +19973882709571155498197027019790996 5.0000000000000000000 * i, \\
c_4 &= 833203592143992836.99999999999999999999999999999999999999 \\
&\quad +1440745079627188961.9999999999999999999999999999999999999 * i, \\
c_5 &= 831633514311304089.00000000000000000000000000000000000000 \\
&\quad +1440745160302976849.9999999999999999999999999999999999999 * i, \\
c_6 &= 415907312899131351.00000000000000000000000000000000000000 \\
&\quad +720372619959247547.99999999999999999999999999999999999999 * i, \\
c_7 &= 0.000000000000000000000000000000000000000000000000000000 \\
&\quad +0.000000000000000000000000000000000000000000000000000000 * i, \\
c_8 &= 2.999999999999999999999999999999999999999999999999999999 \\
&\quad + -0.000000000000000000000000000000000000000000000000000000 * i.
\end{aligned}
$$

Der Fall $i = 8$:

$$
\begin{aligned}
\lambda^{-1} &= ((-10811229 - 333614037951i) * \sigma_1 + (288924666087 + 166797644727i) * \sigma_2 \\
&\quad +(-288911621499 + 166817212611i) * \sigma_3 + (-288950226357 + 166841751567i) * \sigma_4 \\
&\quad +(-288949859361 + 166795350849i) * \sigma_5 + (288961242063 + 166818226797i) * \sigma_6 \\
&\quad +(24596235 - 333636962757i) * \sigma_7 + (-14099403 - 333656057361i) * \sigma_8 \\
&\quad +(288925170273 + 166838443503i) * \sigma_9)/192410964
\end{aligned}
$$

Die Koeffizienten des Minimalpolynoms:

$$
\begin{aligned}
c_0 &= 11055897259778978709844486045904695186574120090 01.000000 \\
&\quad -60758337730094832674836845508482880081 20.000000000000000 * i \\
c_1 &= -29014949455266761741628270232038 17.9999999999999999999 \\
&\quad +49997350257575245198820392726396 80 * i \\
c_2 &= -48129722355274525583574982067244 5.99999999999999999999 \\
&\quad +83359564738367553493864215586416 0.00000000000000000000 * i \\
c_3 &= -16038137105388519108524108362608 2.99999999999999999999
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
& +277788682077701031896002788707640.0000000000000000000000 * i \\
c_4 &= -280785604103084331.0000000000000000000000000000000000000 \\
& -481375397983208039.9999999999999999999999999999999999999 * i \\
c_5 &= -93074152955963085.00000000000000000000000000000000000000 \\
& -161212606416590039.9999999999999999999999999999999999999 * i \\
c_6 &= -15510385294357545.00000000000000000000000000000000000000 \\
& -26864775602098199.99999999999999999999999999999999999999 * i \\
c_7 &= -0.000000000000000000000000000000000000000000000000000000 \\
& -0.000000000000000000000000000000000000000000000000000000 * i \\
c_8 &= 8.99999999999999999999999999999999999999999999999999999 \\
& -0.000000000000000000000000000000000000000000000000000000 * i
\end{aligned}
$$

Abschließend wurden zur Verifikation der Resultate durch "Rückwärtsrechnen" die komplexen Näherungen von $\varepsilon = \lambda^{-1}(\theta)$ und seinen Konjugierten berechnet und daraus die Diskriminante von $\mathcal{A}_K(\mathfrak{p}_L^i)\varepsilon$.
Damit ist die Beschreibung des ersten Beispiels abgeschlossen und wir wenden uns nun dem Beispiel 2 zu. Prinzipiell wäre es möglich in diesem Fall genauso wie in Beispiel 1 vorzugehen, jedoch war dies wegen der Größe der zugrundeliegenden Körpererweiterungen ($[K(27):K] = 162$) nicht möglich.
Wir betrachten daher nur die Lokalisierung nach der 3 und schreiben ab sofort $R = \mathcal{O}_{K,(3)}$. Da die Erweiterung L/K über (3) voll verzweigt ist, stellen die Potenzen $\pi^{\delta+j}, j = 0, \ldots, 26, \delta \in 0, \ldots, 26\}$, eine R-Basis von $\mathfrak{p}_L^\delta$ dar.Mittels der Formel

$$[\mathcal{O}_L : \mathcal{O}_K[G]\pi]_{\mathcal{O}_K} = \left(\frac{d_{L/K}(\mathcal{O}_K[G]\pi)}{d_{L/K}}\right)^{1/2} = \frac{d_{L/K}(\mathcal{O}_K[G]\pi)^{1/2}}{3^{35}}$$

berechnen wir zunächst den Index D von $\mathcal{O}_K[G]\pi$ in $\mathcal{O}_L$ und schreiben $D = 3^t D_1$ mit $(D_1, 3) = 1, D_1 \in \mathcal{O}_K, t \in \mathbf{Z}, t \geq 0$. Sodann berechnen wir die Übergangsmatrix $T \in K^{27}$ für die gilt

$$D_1 \begin{pmatrix} \pi^\delta \\ \pi^{\delta+1} \\ \vdots \\ \pi^{\delta+26} \end{pmatrix} = T \begin{pmatrix} \pi^{\sigma_1} \\ \vdots \\ \pi^{\sigma_{27}} \end{pmatrix},$$

wobei zu beachten ist, daß wegen $(D_1, 3) = 1$ die Komponeneten der linken Seite ebenfalls eine R-Basis von $\mathfrak{p}_L^\delta$ darstellen. Die Berechnung von T erfolgt nach demselben Verfahren wie diejenige von S in (1); eine Schranke für die Nenner der Einträge von T ist hier durch 3^t gegeben.
Im Grunde gehen wir bei der Berechnung der assoziierten Ordnung wie in [Bl,Bu] vor, allerdings vermeiden wir die explizite Berechnung der Darstellungsmatrizen

$A(\sigma), \sigma \in G$. Vielmehr setzen wir hier $\theta = \sum_{i=1}^{27} t_i \pi^{\sigma_i}$ mit $t_i = t_{\sigma_i} \in \mathcal{O}_K$, so daß $\theta \in \mathfrak{p}_L^\delta$ gilt und θ eine Normalbasis auf Körperniveau erzeugt. Explizit wählen wir $\theta = 3\pi$.
Zur Bestimmung von $\mathcal{A}_\theta(\mathfrak{p}_L^\delta)$ setzen wir nun $\lambda_j = \sum_{i=1}^{27} x_i \sigma_i$ für $j = 0, \ldots, 26$ an und erhalten

$$\lambda_j(\theta) = \sum_{k=1}^{27} \left(\sum_{i=1}^{27} t_{\sigma_k \sigma_i^{-1}} x_i \right) \pi^{\sigma_k}.$$

Durch Koeffizientenvergleich ergibt sich aus der Gleichung $\lambda_j(\theta) = D_1 \pi^{\delta + j} = \sum_{k=1}^{27} T_{j+1,k} \pi^{\sigma_k}$ ein leicht zu lösendes lineares Gleichungssystem. $\mathcal{A}_\theta(\mathfrak{p}_L^\delta)$ ist dann durch den R-Aufspann der Elemente $\lambda_0, \ldots, \lambda_{26}$ gegeben.
Um einen reibungslosen Verlauf der weiteren Rechnungen zu garantieren, ist es notwendig, die Basis von $\mathcal{A}_\theta(\mathfrak{p}_L^\delta)$ in eine für numerische Zwecke günstigere Form zu bringen. Dazu bestimmen wir den Hauptnenner d der Matrix S für die gilt

$$(\lambda_0, \ldots, \lambda_{26}) = (\sigma_1, \ldots, \sigma_{27}) S$$

und berechnen die Hermitesche Normalform H von dS, wobei die Berechnung von H modulo dem Exponenten d erfolgen kann. Die Komponeneten von $\frac{1}{d}(\sigma_1, \ldots, \sigma_{27}) S$ liefern nun eine R-Basis in unterer Dreiecksform.
Das Dual der assoziierten Ordnung ist nun durch $\mathcal{A}_\theta(\mathfrak{p}_L^\delta)\mathcal{A}_\theta(\mathfrak{p}_L^\delta)^*$ gegeben, wobei dieses Gitter zunächst durch die 27^2 Elemente $\lambda_i \lambda_j^*, 0 \leq i, j \leq 26$, erzeugt wird. Die Berechnung einer Basis führt wieder auf die Bestimmung der Hermiteschen Normalform einer Matrix A mit

$$(\lambda_i \lambda_j^*)_{0 \leq i,j \leq 26} = (\sigma_1, \ldots, \sigma_{27}) A,$$

wobei wegen $\mathcal{M}_{K[G]}{}^* \subseteq \mathcal{A}_K(\mathfrak{p}_L^\delta)^* \subseteq \mathcal{O}_K[G]^* = \mathcal{O}_K[G]$ und $27\mathcal{M}_{K[G]}{}^* \subseteq \mathcal{O}_K[G]$ modulo dem Exponenten 27 gerechnet werden kann.
Ziel des letzten Abschnitts ist nun die Berechnung der Indizes $\left[\mathcal{A}_\theta(\mathfrak{p}_L^\delta)\mathcal{M}_{K[G]} : \mathcal{A}_\theta(\mathfrak{p}_L^\delta)\right]_R$ und $\left[\mathcal{M}_{K[G]} : \mathcal{A}_K(\mathfrak{p}_L^\delta)\right]_R$ und daran anschließend die Überprüfung von Fröhlichs Kriterium. Die Berechnung der Maximalordnung $\mathcal{M}_{K[G]}$ stellt dabei natürlich keine Schwierigkeit dar, einzig die Berechnung einer Basis von $\mathcal{A}_\theta(\mathfrak{p}_L^\delta)\mathcal{M}_{K[G]}$ ist ein gewisser numerischer Aufwand.
Wir setzen nun $I_1 = [\mathcal{A}_\theta(\mathfrak{p}_L^i)(\mathfrak{p}_L^4)\mathcal{M}_{K[G]} : \mathcal{A}_\theta(\mathfrak{p}_L^i)]_R$ und $I_2 = [\mathcal{M}_{K[G]} : \mathcal{A}_K(\mathfrak{p}_L^i)]_R$.
Es ergaben sich folgende Indizes:

$i = 4$	$I_1 = 43046721$	$I_2 = 387420489$
$i = 7$	$I_1 = 43046721$	$I_2 = 387420489$
$i = 8$	$I_1 = 129140163$	$I_2 = 129140163$
$i = 9$	$I_1 = 387420489$	$I_2 = 387420489$
$i = 10$	$I_1 = 1162261467$	$I_2 = 1162261467$
$i = 11$	$I_1 = 531441$	$I_2 = 129140163$

Die Übereinstimmung der Indizes für $\delta \in \{8, 9, 10\}$ zeigt nun, daß hier $\mathfrak{p}_L^\delta$ lokal frei über seiner assoziierten Ordnung ist. Leider war es im zweiten Beispiel nicht möglich diese Resultate durch "Rückwärtsrechnen" zu verifizieren, zum einen weil Fröhlichs Kriterium keinen expliziten Erzeuger liefert, zum anderen weil es vermutlich die Größe des Beispiels ohnehin nicht erlauben würde. Jedoch geben die Resultate für $\delta = 4, 7, 11$ (hier liefern Resultate theoretischer Natur, daß $\left[\mathcal{A}_\theta(\mathfrak{p}_L^\delta)\mathcal{M}_{K[G]} : \mathcal{A}_\theta(\mathfrak{p}_L^\delta)\right]_R$ ein echter Teiler von $\left[\mathcal{M}_{K[G]} : \mathcal{A}_K(\mathfrak{p}_L^\delta)\right]_R$ ist) durchaus Anlaß, an die Verläßlichkeit der gefundenen Resultate zu glauben.

Literatur

[Bl1] W.Bley, *Computing associated orders and Galois generating elements*, erscheint im J.Number Theory.

[Bl2] W.Bley, *An algorithmic approach to determining local and global module structures*, Anhang zu [Bu], preprint 1996.

[Bl,Bu] W. Bley, D. Burns, *Über Arithmetische Assoziierte Ordnungen*, erscheint im J.Number Theory.

[Bu] D. Burns, *On the equivariant structure of ideals in Galois extensions of fields*, Preprint 1996.

[Co] H.Cohen, *A Course in Computational Algebraic Number Theory*, Springer Verlag 1993.

[Er,Ta] B.Erez, M. Taylor *Hermitian modules in Galois extensions of number fields and Adams operation*, Annals of Math. 135 (1992) 271 - 296.

[Fr] A.Fröhlich, *Invariants for modules over commutative separable orders*, Quart. J. Math. Oxford 16 (1965) 193-232.

[Gi] K. Girstmair, *A Remark on Normal Bases*, preprint.

[Sch1] R.Schertz, *Konstruktion von Potenzganzheitbasen in Strahlklassenkörpern über imaginär-quadratischen Zahlkörpern*, Crelle 398 (1989) 105-129.

[Sch2] R.Schertz, *Zur expliziten Berechnung von Ganzheitsbasen in Strahlklassenkörpern über einem imaginär-quadratischen Zahlkörper*, J.Number Theory 34, (1990) 41-53.

[KA] J. Graf v. Schmettow, (it KANT - a tool for computations in algebraic number fields, in: A. Pethö, M.E.Pohst, H.C. Williams, H.G.Zimmer (eds.), *"Computational Number Theory"*, Walter de Gruyter 1991, 321-330.