Prof. W. Bley 11.12.2012

9. Übungsblatt zur Algebraischen Zahlentheorie II

In den ersten beiden Aufgaben wird auf die Notationen der Vorlesung zurückgegriffen.

Aufgabe 1 Sei K ein einfach reeller Zahlkörper, d.h. $s = 1, t = 1$. Skizzieren Sie den Fundamentalbereich $\mathcal{F}$.

Aufgabe 2
a) Zeigen Sie: $\phi(\mathfrak{b}) \cap r^{1/n}\mathcal{G} = \{b \in \mathfrak{b} \mid |N(b)| \leq r \text{ und } \phi(b) \in \mathcal{F}\}$.
b) Zeigen Sie: $\#(\phi(\mathfrak{b}) \cap r^{1/n}\mathcal{G}) < \infty$.
c) Zeigen Sie: $\#\{b \in \mathfrak{b} \mid |N(b)| \leq r\} = \infty$ für "fast alle Zahlkörper K". Präzisieren Sie diese Aussage.

Aufgabe 3 Sei G eine endliche abelsche Gruppe und $\chi \colon G \longrightarrow \mathbb{C}^\times$ ein Gruppenhomomorphismus. Zeige:

$$\sum_{g \in G} \chi(g) = \begin{cases} |G|, & \text{falls } \chi = 1, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Aufgabe 4 Sei χ ein Dirichletcharakter und $L(s, \chi)$ die zugehörige Dirichletsche L-Reihe. Zeige, dass $L(s, \chi)$ für $\mathrm{Re}(s) > 0$ konvergiert.