

6. Übungsblatt zur Algebraischen Zahlentheorie II

Aufgabe 1 Sei $K = F(x, y)$, wobei x und y einer Gleichung der Form

$$Y^2 = (X - a_1)(X - a_2) \cdots (X - a_n) \text{ mit } a_i \in F$$

genügen.

Sei D_i der Divisor von $x - a_i$ in $F(x)$. Berechnen Sie $i_{K/F(x)}(D_i)$.

Aufgabe 2 Sei $p \neq 2$ eine Primzahl und $F = \mathbb{F}_p$. Sei $g(x) \in F[x]$ ein quadratfreies, nicht-konstantes Polynom und K der Zerfällungskörper von $Y^2 - g(x) \in F(x)[Y]$.

Berechnen Sie den Differentendivisor von $K/F(x)$.

Für die weiteren Aufgaben benutzen wir die Geschlechterformel von Riemann-Hurwitz: Sei L/K eine endliche separable Erweiterung von Funktionenkörpern in einer Variablen. Dann gilt:

$$2g_L - 2 = [L : K](2g_K - 2) + \deg_L(D_{L/K}).$$

Aufgabe 3 Voraussetzungen wie in Aufgabe 4. Berechnen Sie das Geschlecht von K .

Aufgabe 4 Sei K ein Funktionenkörper vom Geschlecht $g_K = 0$. Sei L/K eine endliche separable geometrische Erweiterung. Zeigen Sie:

$$L/K \text{ unverzweigt} \implies L = K.$$