Prof. W. Bley 13.11.2012

4. Übungsblatt zur Algebraischen Zahlentheorie II

Aufgabe 1 Sei Ω_K der Vektorraum der Weil-Differentiale und D ein Divisor, $x \in K^\times$.
a) Zeigen Sie:

$$\omega \in \Omega_K(D) \implies x\omega \in \Omega_K((x) + D).$$

b) Zeigen Sie: $(x\omega) = (x) + (\omega)$.

Aufgabe 2 Sei D ein Divisor vom Grad 0, aber kein Hauptdivisor. Zeigen Sie: $\dim_F \Omega_K(D) = g - 1$.

Aufgabe 3 Im Beweis zur Riemannschen Ungleichung wurde das Geschlecht g definiert durch $g - 1 := \max_{m \geq m_0} r(mB)$, wobei B der Poldivisor zu einem $x \in K \setminus F$ ist.
Sei nun $K = F(x)$ und $B = (x)_\infty$ der Poldivisor von x. Zeigen Sie nochmals anhand dieser Definition, dass hier $g = 0$ gilt.

Aufgabe 4 Sei $0 \neq \omega \in \Omega_K$ und $D \in \mathcal{D}_K$. Zeigen Sie folgende Isomorphie von K-Vektorräumen:

$$L((\omega) - D) \simeq \Omega_K(D), \quad x \mapsto x\omega.$$

Aufgabe 5 Sei K ein Funktionenkörper in einer Variablen mit algebraisch abgeschlossenem Konstantenkörper F. Sei $g > 0$.
a) Zeige: Jede Primstelle hat Grad 1.
b) Zeige: Für jede Primstelle gilt $l(P) = 1$.
c) Zeige: $\Omega_K(P)$ ist echt enthalten in $\Omega_K(0)$.