Prof. W. Bley 06.11.2012

3. Übungsblatt zur Algebraischen Zahlentheorie II

Aufgabe 1 Sei A ein nullteilerfreier Ring und P ein maximales Ideal von A.
a) Zeigen Sie:

$$A_P/PA_P \simeq A/P.$$

Ist dies auch noch richtig, wenn P ein Primideal ist?
b) Sei nun A ein diskreter Bewertungsring mit maximalem Ideal P. Seien $\hat{A}$ und $\hat{P}$ die Komplettierungen. Zeigen Sie:

$$\hat{A}/\hat{P} \simeq A/P.$$

Aufgabe 2 Sei $K = F(x)$ und P_∞ die unendliche Primstelle und $n \in \mathbb{Z}, n \geq 0$. Zeigen Sie:

$$L(nP_\infty) = \{f(x) \in F[x] \mid \deg(f) \leq n\}.$$

Aufgabe 3
a) Sei K ein Funktionenkörper in einer Variablen und A_K der Ring der Adele. Bestimmen Sie $A_K^\times$.
b) Zeigen Sie: $\bigcup_D A_K(D) = A_K$.

Aufgabe 4 Sei Ω_K der Vektorraum der Weil-Differentiale und D ein Divisor, $x \in K^\times$. Zeigen Sie:

$$\omega \in \Omega_K(D) \implies x\omega \in \Omega_K((x) + D).$$

Aufgabe 5 Sei D ein Divisor vom Grad 0, aber kein Hauptdivisor. Zeigen Sie: $\dim_F \Omega_K(D) = g - 1$.

Aufgabe 6 K/F habe Geschlecht $g = 0$ und P sei ein Primdivisor vom Grad 2.
a) Zeige, daß $l(P) = 3$.
b) Sei $\{1, x, y\}$ eine F-Basis von $L(P)$. Man zeige, daß $\{1, x, y, x^2, y^2, xy\} \subseteq L(2P)$ und folgere daraus, daß x und y einem Polynom vom Grad 2 über F genügen.
c) Man zeige, $[K : F(x)] = 2$ und $K = F(x, y)$.

Aufgabe 7 K/F habe Geschlecht $g = 1$ und P sei ein Primdivisor vom Grad 1.
a) Zeige, daß $l(2P) = 2$ und $l(3P) = 3$.

b) Sei $\{1, x\}$ eine F-Basis von $L(2P)$ und$\{1, x, y\}$ eine F-Basis von $L(3P)$. Man zeige, daß x und y einem Polynom vom Grad 3 der Form

$$Y^2 + a_1 XY + a_3 Y = X^3 + a_2 X^2 + a_4 X + a_6, \quad a_i \in F$$

genügen.
Man betrachte dazu $L(6P)$.
c) Man zeige, $[K : F(x)] = 2$ und $K = F(x, y)$.