

12. Übungsblatt zur Algebraischen Zahlentheorie II

Aufgabe 1 Sei $G = \langle \sigma \rangle \times \langle \tau \rangle$ eine Kleinsche Vierergruppe. Seien H_1, H_2, H_3 die Untergruppen der Ordnung 2. Zeige:

$$\text{ind}_{\{1\}}^G(1) + 2\chi_0 = \text{ind}_{H_1}^G(1) + \text{ind}_{H_2}^G(1) + \text{ind}_{H_3}^G(1).$$

Hierbei bezeichnet χ_0 den trivialen Charakter von G .

Aufgabe 2 Notation wie in Aufgabe 1. Sei nun L/\mathbb{Q} eine Galoiserweiterung mit Gruppe G . Sei $k_i := L^{H_i}$. Zeige:

$$\zeta_L(s)\zeta_{\mathbb{Q}}(s)^2 = \prod_{i=1}^3 \zeta_{k_i}(s).$$

Aufgabe 3 Sei nun $L = \mathbb{Q}(\sqrt{-3}, \sqrt{-2})$.

a) Zeigen Sie: $w_L = 6$.

b) Entwickeln Sie eine Formel für die Klassenzahl h_L von L in Abhängigkeit von den Klassenzahlen h_{k_i} und dem Index $[\mathcal{O}_L^\times : \mathcal{O}_{k_1}^\times]$, wobei $k_1 = \mathbb{Q}(\sqrt{6})$.