Seminar zur Zahlentheorie (WS 2025/26)

Vorkenntnisse: Algebra, Algebraische Zahlentheorie

Geplanter Beginn: Freitag, 9.1.2026, ab 13 Uhr Für Freitag und Samstag sind 6 Vorträge geplant. Voraussichtlich werden wir dann am Montag weiter machen.

Vorläufiges Programm / Vorträge

- Modultheorie über Dedekindringen
  Sei $\mathcal{O}$ ein Dedekindring, zum Beispiel $\mathcal{O} = \mathcal{O}_K$ der Ring der ganzen Zahlen in einem Zahlkörper K. Ganz ähnlich wie über Hauptidealringen sind endlich-erzeugte torsionsfreie $\mathcal{O}$-Moduln leicht bis auf Isomorphie zu charakterisieren. Über Hauptidealringen ist ein torsionsfreier Modul durch seinen Rang eindeutig bis auf Isomorphie bestimmt. Über Dedekindringen kommt eine einzige weitere Invariante dazu, die sogenannte Steinitzklasse, die den Modul bis auf Isomorphie festlegt. Die Steinitzklasse ist ein Element der Idealklassengruppe.

  Literatur:

  – Fröhlich/Taylor, Algebraic Number Theory, Ch. II.4
  – Cohen, Advanced topics in computational number theory, Ch.1.1.1 und 1.1.2
  – Cobbe, Steinitz classes of tamely ramified Galois extensions of algebraic number fields, Journal of Number Theory 130 (2010), 1129 - 1154

  Die grundlegenden Resultate in den Lehrbüchern von Fröhlich/Taylor und Cohen sollen im Detail vorgestellt und auch weitestgehend bewiesen werden. In der Arbeit von Cobbe geht es darum, die Fragestellung und die Resultate zu verstehen.

  Vorträge:

  1. Formuliere und Beweise Theorem 1.2.12 und Korollar 1.2.13 in Cohens Buch (2 Vorträge)
     Vortragende: Katharina Endres, Fr 9.1.2026, 13:00 - 14:30 Uhr und 15:00 - 16:30 Uhr
  2. Beschreibe ohne Beweis die Resultate in Cobbes Paper. Zeige dann, dass in einer Galoiserweiterung von Zahlkörpern L/K mit $G := \mathrm{Gal}(L/K)$ folgende Aussagen äquivalent sind:
     (a) $\mathcal{O}_L$ ist $\mathcal{O}_K[G]$-projektiv.
     (b) $\mathcal{O}_L$ ist $\mathbb{Z}[G]$-projectiv
     (c) L/K ist zahm verzweigt.
     (d) $\mathrm{Tr}_{L/K} : \mathcal{O}_L \longrightarrow \mathcal{O}_K$ ist surjektiv.

     (siehe zum Beispiel Curtis/Reiner, Methods of representation theory I, Exercises 4.13 und 4.15). Gib dann eine sehr kurze Definition der lokal freien Klassengruppe, beschreibe wesentliche Eigenschaften und beschreibe das Hauptresultat in McCulloh, Galois Module Structure of Abelian extensions, Crelle 1987 (alles ohne Beweis und Details).
     Vortragender: Gustav Berth, Sa, 10.1.2026, 9:00 - 10:30 Uhr

- **Picard- und Chowgruppen eindimensionaler Noetherscher Ringe**
  Sei $\mathcal{O}$ ein ein-dimensionaler, noetherscher Integritätsbereich, zum Beispiel eine Teilordnung in einem algebraischen Zahlkörper. Dann ist $\mathcal{O}$ im Allgemeinen kein Dedekindring, da er nicht ganz abgeschlossen in seinem Quotientenkörper ist. Sei $\tilde{\mathcal{O}}$ die Normalisierung von $\mathcal{O}$, d.h. $\tilde{\mathcal{O}}$ ist der ganze Abschluss von $\mathcal{O}$ in seinem Quotientenkörper. Zu $\mathcal{O}$ definiert man nun die Picardgruppe $\mathrm{Pic}(\mathcal{O})$ und die Chowgruppe $\mathrm{Chow}(\mathcal{O})$. Im Fall $\tilde{\mathcal{O}} = \mathcal{O}$ stimmen beide Gruppen überein mit der Idealklassengruppe von $\tilde{\mathcal{O}}$, ansonsten gibt es natürliche Abbildungen zwischen diesen Gruppen, die wir genauer studieren wollen.

  Literatur:

  – Neukirch, Algebraische Zahlentheorie, Kap. I.12
  – Kirschmer/Klüners, Chow groups of one-dimensional Noetherian domains, Research in Number Theory 10 (2024)
  – Eisenbud, Commutative Algebra

  Die grundlegenden Resultate im Lehrbuch von Neukirch sollen im Detail vorgestellt und auch weitestgehend bewiesen werden. In der Arbeit von Kirschmer/Klüners geht es darum, die Fragestellung und die Resultate zu verstehen und möglichst viel davon zu beweisen.

Vorträge:

1. Beginnend mit §12 in Neukirchs Buch soll für einen eindimensionalen noetherschen Integritätsbereich $\mathcal{O}$ mit Quotientenkörper K die Picardgruppe $\mathrm{Pic}(\mathcal{O})$ eingeführt werden. Beweise Satz (12.6), welcher die exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}^\times \longrightarrow K^\times \longrightarrow \bigoplus_{\mathfrak{p}} P(\mathcal{O}_\mathfrak{p}) \longrightarrow \mathrm{Pic}(\mathcal{O}) \longrightarrow 0$$

   liefert.
   Vortragende: Charlotta Peters, Sa, 10.1.2026, 11:00 - 12:30 Uhr

2. (a) Beweise den Satz (12.8) (Krull-Akizuki), welcher besagt, dass der ganze Abschluss von $\mathcal{O}$ in einer endlichen Körpererweiterung L/K ein Dedekindring ist. (b) Beweise den Satz (12.9), der die Picardgruppe $\mathrm{Pic}(\tilde{\mathcal{O}})$ der Normalisierung $\tilde{\mathcal{O}}$ von $\mathcal{O}$ mit $\mathrm{Pic}(\mathcal{O})$ in Beziehung setzt. Genauer wird gezeigt, dass die kanonische Sequenz

$$1 \longrightarrow \mathcal{O}^\times \longrightarrow \tilde{\mathcal{O}}^\times \longrightarrow \bigoplus_{\mathfrak{p}} \tilde{\mathcal{O}}_\mathfrak{p}^\times/\mathcal{O}_\mathfrak{p}^\times \longrightarrow \mathrm{Pic}(\mathcal{O}) \longrightarrow \mathrm{Pic}(\tilde{\mathcal{O}}) \longrightarrow 1$$

   exakt ist.
   Vortragende: Charlotta Peters, Sa, 10.1.2026, 13:30 - 15:00 Uhr

3. Definiere reguläre Primideale und den Führer $\mathfrak{f}$ von $\mathcal{O}$ in $\tilde{\mathcal{O}}$. Beweise die Sätze (12.10) bis (12.12). In Satz (12.12) wird die Formel

$$\#\mathrm{Pic}(\mathcal{O}) = \frac{h_K}{({\mathcal{O}_K}^\times : \mathcal{O}^\times)} \cdot \frac{\#(\mathcal{O}_K/\mathfrak{f})^\times}{\#(\mathcal{O}/\mathfrak{f})^\times}$$

   bewiesen.
   Vortragender: Jakob Bensch, Sa, 10.1.2026, 16:00 - 17:30 Uhr

4. Definiere die Divisorenklassengruppe $\mathrm{CH}^1(\mathcal{O})$ und die Abbildung

$$\mathrm{div}\colon \mathrm{Pic}(\mathcal{O}) \longrightarrow \mathrm{CH}^1(\mathcal{O}).$$

   Falls $\mathcal{O}$ ein Dedekindring ist, so ist div ein Isomorphismus (Satz (12.14)).

   Ab hier studieren wir die Arbeit von Kirschmer/Klüners. Diskutiere Proposition 2.2, insbesondere soll $\bar{f}_*\colon \mathrm{CH}^1(\mathcal{O}') \longrightarrow \mathrm{CH}^1(\mathcal{O})$ für $\mathcal{O} \subseteq \mathcal{O}'$ eingeführt werden. Beweise Lemma 2.5 und Theorem 2.6.
   Vortragender: Linus Dietrich, Mo, 12.1.2026, 14:00 - 15:30 Uhr

5. Beweise Theorem 2.7, welches den Kern und das Bild von $\bar{f}_*\colon \mathrm{CH}^1(\tilde{\mathcal{O}}) \longrightarrow \mathrm{CH}^1(\mathcal{O})$ beschreibt. Unter der Voraussetzung, dass man $\mathrm{Pic}(\tilde{\mathcal{O}}) \simeq \mathrm{CH}^1(\tilde{\mathcal{O}})$ effektiv berechnen kann, ergibt sich hieraus ein Algorithmus zur Berechnung von $\mathrm{CH}^1(\tilde{\mathcal{O}})$ (Algorithmus 2.8.) Diskutiere weiter die Abbildung $\overline{\mathrm{div}} : \mathrm{Pic}(\mathcal{O}) \longrightarrow \mathrm{CH}^1(\mathcal{O})$ wie in Proposition 2.10.
   Vortragender: Laurenz Wiesenberger, Mo, 12.1.2026, 16:00 - 17:30 Uhr

6. Diskutiere die Resultate in Abschnitt 3. Für einen Zahlkörper K wird hier der Frage nachgegangen, ob Teilordnungen $\mathcal{O} \subseteq \mathcal{O}_K$ mit trivialer Divisorenklassengruppe $\mathrm{CH}^1(\mathcal{O})$ existieren.
   Vortragender: Stefan Albrecht, Mo, 19.1.2026, 14:00 - 15:30 Uhr

7. Beweise Theorem 11.6 und Korollar 11.7. in Eisenbuds Buch. Diskutiere kurz Theorem 11.8. Beweise Theorem 11.10 und Proposition 11.11. Durch diesen Vortrag wird der Rahmen für eine eventuelle Verallgemeinerung der Resultate von Kischmer und Klüners geschaffen.
   Vortragender: Tassilo Albert, Mo, 19.1.2026, 16:00 - 17:30 Uhr