

7. Übungsblatt zur Algebraischen Geometrie II

Aufgabe 1 Ein Morphismus $f : X \rightarrow Y$ von Schemata heißt affin, falls es eine offene affine Überdeckung (V_i) von Y gibt, so daß $f^{-1}(V_i)$ für jedes i affin ist. Man kann zeigen, daß f genau dann affin ist, wenn für jede offene affine Teilmenge V von Y , das Urbild $f^{-1}(V)$ affin ist.

Sei nun $f : X \rightarrow Y$ ein affiner Morphismus von noetherschen separierten Schemata. Sei $\mathcal{F}$ eine quasi-kohärente Modulgarbe auf X . Zeige, daß es natürliche Isomorphismen

$$H^i(X, \mathcal{F}) \simeq H^i(Y, f_*\mathcal{F})$$

für alle $i \geq 0$ gibt.

Aufgabe 2 Sei $X = \mathbb{A}_k^2 = \operatorname{Spec}(k[x, y])$ und sei $U := X \setminus \{(x, y)\}$.

a) Zeige, daß $H^1(U, \mathcal{O}_U)$ isomorph zum k -Vektorraum $\langle x^i y^j \mid i, j < 0 \rangle_k$ ist.
(Hinweis: Čech-Kohomologie für $U = D(x) \cup D(y)$.)

b) Nutze dies für einen weiteren Beweis, daß U nicht affin ist.

Aufgabe 3 Sei $(X, \mathcal{O}_X)$ ein geringter Raum und $\operatorname{Pic}(X)$ die Gruppe der Isomorphismenklassen von invertierbaren Garben. Sei $\mathcal{O}_X^*$ die Garbe, deren Schnitte über U (U offen in X) die Einheiten in $\Gamma(U, \mathcal{O}_X)$ sind. Zeige:

$$\operatorname{Pic}(X) \simeq H^1(X, \mathcal{O}_X^*).$$

(Hinweis: Sei $\mathcal{L}$ eine invertierbare Garbe. Überdecke X mit offenen Mengen U_i , so daß $\varphi_i : \mathcal{O}_{U_i} \simeq \mathcal{L}|_{U_i}$. Auf $U_i \cap U_j$ erhält man einen Isomorphismus $\varphi_i^{-1} \circ \varphi_j : \mathcal{O}_{U_i \cap U_j} \rightarrow \mathcal{O}_{U_i \cap U_j}$. Dies liefert ein Element in $\check{H}^1((U_i)_{i \in I}, \mathcal{O}_X^*)$.)