

3. Übungsblatt zur Algebraischen Geometrie II

Aufgabe 1 Sei X ein topologischer Raum und $Z \subseteq X$ eine abgeschlossene Teilmenge. Sei $i: Z \rightarrow X$ die Inklusion, sei $U := X \setminus Z$ und $j: U \rightarrow X$ die Inklusion.

- (a) Sei $\mathcal{F}$ eine Garbe auf Z . Berechne die Halme von $i_*\mathcal{F}$.
 (b) Sei nun $\mathcal{F}$ eine Garbe auf U . Betrachte die folgende Prägarbe auf X :

$$V \mapsto \begin{cases} \mathcal{F}(V), & \text{falls } V \subseteq U, \\ 0, & \text{falls } V \not\subseteq U. \end{cases}$$

Zeige, dass dies im Allgemeinen keine Garbe ist.

- (c) Sei $j_!\mathcal{F}$ die Garbifizierung der Prägarbe in (b). Zeige, dass für alle $P \in X$ gilt:

$$(j_!\mathcal{F})_P = \begin{cases} \mathcal{F}_P, & \text{falls } P \in U, \\ 0, & \text{falls } P \notin U. \end{cases}$$

Zeige, dass $j_!\mathcal{F}$ die einzige Garbe auf X mit dieser Eigenschaft ist, und deren Restriktion auf U gerade $\mathcal{F}$ ist.

- (d) Sei nun $\mathcal{F}$ eine Garbe auf X . Zeige, dass es eine exakte Sequenz von $\mathcal{O}_X$ -Moduln der Form

$$0 \rightarrow j_!(\mathcal{F}|_U) \rightarrow \mathcal{F} \rightarrow i_*(\mathcal{F}|_Z) \rightarrow 0$$

gibt. Hierbei ist $\mathcal{F}|_Z := i^{-1}\mathcal{F}$.

Aufgabe 2 Sei X ein Schema und $\mathcal{F}$ ein $\mathcal{O}_X$ -Modul von endlichem Typ. Zeige, dass

$$\text{Supp}(\mathcal{F}) := \{x \in X \mid \mathcal{F}_x \neq 0\}$$

eine abgeschlossene Teilmenge von X ist.

Aufgabe 3

a) Sei R ein diskreter Bewertungsring mit Quotientenkörper K . Sei $X = \text{Spec}(R)$. Zeige: Jeder $\mathcal{O}_X$ -Modul $\mathcal{F}$ entspricht eindeutig folgendem Satz von Daten: einem R -Modul M , einem K -Vektorraum V und einem Homomorphismus von K -Vektorräumen $\rho: M \otimes_R K \rightarrow V$.

b) Zeige: Ein solcher $\mathcal{O}_X$ -Modul ist genau dann quasi-kohärent, wenn ρ ein Isomorphismus ist.

Aufgabe 4

a) Sei $f: X \rightarrow Y$ eine abgeschlossene Immersion. Zeige, dass f endlich ist,

b) Seien X und Y noethersche Schemata und $f: X \rightarrow Y$ endlich. Sei $\mathcal{F}$ eine kohärente $\mathcal{O}_X$ -Modulgarbe. Zeige: $f_*\mathcal{F}$ ist kohärent.

Die Aufgaben werden am Donnerstag, 8. Mai 2014, in der Übung besprochen.