

2. Übungsblatt zur Algebraischen Geometrie II

Aufgabe 1 Sei $(X, \mathcal{O}_X)$ ein geringter Raum und $\mathcal{L}, \mathcal{M}$ invertierbare (d.h. lokal frei vom Rang 1) $\mathcal{O}_X$ -Moduln.

a) Zeige: $\mathcal{L} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{M}$ ist invertierbar.

b) Definiere $\mathcal{L}^{-1} := \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{L}, \mathcal{O}_X)$ und zeige, dass $\mathcal{L}^{-1}$ invertierbar ist.

c) Zeige: $\mathcal{L} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{L}^{-1} \simeq \mathcal{O}_X$.

Die Isomorphieklassen von invertierbaren $\mathcal{O}_X$ -Moduln formen also unter dem Tensorprodukt eine abelsche Gruppe, die sogenannte *Picardgruppe*.

Aufgabe 2 Sei $(X, \mathcal{O}_X)$ ein lokal geringter Raum und sei $\mathcal{F}$ ein $\mathcal{O}_X$ -Modul von endlichem Typ, d.h. für alle $x \in X$ gibt es eine offene Umgebung U von x und eine exakte Sequenz von $\mathcal{O}_{X|U}$ -Moduln der Form

$$\mathcal{O}_{X|U}^n \longrightarrow \mathcal{F}|_U \longrightarrow 0$$

mit einer ganzen Zahl $n \geq 0$ (die von x abhängt). Wir definieren

$$\text{Supp}(\mathcal{F}) := \{x \in X \mid \mathcal{F}_x \neq 0\}.$$

Für $x \in X$ setzt man $\mathcal{F}(x) := \mathcal{F}_x / \mathfrak{m}_x \mathcal{F}_x$. Dies ist ein $\kappa(x)$ -Vektorraum von endlicher Dimension.

a) Zeige: $\text{Supp}(\mathcal{F}) = \{x \in X \mid \mathcal{F}(x) \neq 0\}$.

b) Sei $\mathcal{G}$ ein weiterer $\mathcal{O}_X$ -Modul von endlichem Typ. Zeige:

$$\text{Supp}(\mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{G}) = \text{Supp}(\mathcal{F}) \cap \text{Supp}(\mathcal{G}).$$

c) Sei $f: (X', \mathcal{O}_{X'}) \longrightarrow (X, \mathcal{O}_X)$ ein Morphismus von lokal geringten Räumen. Zeige:

$$\text{Supp}(f^*(\mathcal{F})) = f^{-1}(\text{Supp}(\mathcal{F})).$$

Die Aufgaben werden am Donnerstag, 24. April 2014, in der Übung besprochen.