

## Lösungsvorschlag 7. Übungsblatt Algebraischen Geometrie II

**Aufgabe 1** Nach Voraussetzung ist  $\mathcal{F}$  quasi-kohärent auf  $X$ . Da  $X$  noethersch ist, ist nach Satz (2.21 c)  $f_*\mathcal{F}$  ebenfalls quasi-kohärent. Sei  $\mathcal{V} = (V_i)_i$  eine offen affine Überdeckung von  $Y$ . Da  $Y$  noethersch und separiert ist, berechnet nach Satz (4.6) Čech-Kohomologie die Garbenkohomologie, d.h.  $\check{H}^p(\mathcal{V}, f_*\mathcal{F}) \simeq H^p(Y, f_*\mathcal{F})$  für alle  $p \geq 0$ . Sei  $U_i := f^{-1}(V_i)$ . Da  $f$  affin ist, stellt  $\mathcal{U} := (U_i)_i$  eine offen affine Überdeckung von  $X$  dar. Durch nochmalige Anwendung von Satz (4.6) erhalten wir  $\check{H}^p(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \simeq H^p(X, \mathcal{F})$  für alle  $p \geq 0$ . Es genügt also die Čech-Komplexe zu vergleichen. Man erhält leicht

$$C^p(\mathcal{U}, \mathcal{F}) = C^p(\mathcal{V}, f_*\mathcal{F}) = \prod_{i_0 < \dots < i_p} \mathcal{F}(U_{i_0} \cap \dots \cap U_{i_p}).$$

**Aufgabe 2 a)** Sei  $X = \mathbb{A}_k^2 = \text{Spec}(k[x, y])$  und  $U = X \setminus \{(x, y)\}$ . Dann gilt  $U = D(x) \cup D(y)$ , so dass  $\mathcal{U} := (U_1, U_2)$  mit  $U_1 := D(x)$  und  $U_2 := D(y)$  eine offen affine Überdeckung von  $U$  ist. Da  $U$  noethersch und separiert ist, folgt wieder mit Satz (4.6)

$$H^p(U, \mathcal{O}_U) \simeq \check{H}^p(\mathcal{U}, \mathcal{O}_U).$$

Wir schreiben kurz  $C^0 \longrightarrow C^1 \longrightarrow C^2 \longrightarrow \dots$  für den Čech-Komplex und erhalten

$$\begin{aligned} C^0 &= \mathcal{O}_X(U_1) \times \mathcal{O}_X(U_2) = k[x, y]_x \times k[x, y]_y, \\ C^1 &= \mathcal{O}_X(U_1 \cap U_2) = \mathcal{O}_X(D(xy)) = k[x, y]_{xy}, \\ C^p &= 0 \text{ für } p \geq 2. \end{aligned}$$

Die Randabbildung  $\partial^0: C^0 \longrightarrow C^1$  ist gegeben durch

$$\partial^0 \left( \left( \frac{h_1}{x^n}, \frac{h_2}{y^m} \right) \right) = \frac{h_2}{y^m} - \frac{h_1}{x^n} = \frac{x^n h_2 - y^m h_1}{y^m x^n}.$$

Es gilt:  $H^1(U, \mathcal{O}_U) \simeq k[x, y]_{xy} / \text{im}(\partial^0)$ .

Man zeigt leicht, dass

$$\text{im}(\partial^0) = \left\{ \frac{x^N h_2 - y^N h_1}{(xy)^N} \mid N \in \mathbb{N}_0, h_1, h_2 \in k[x, y] \right\}.$$

Insbesondere ist  $k[x, y] \subseteq \text{im}(\partial^0)$ . Durch Nachrechnen (eventuell in der Übung) zeigt man, dass die Menge  $\{\sum_{i,j \geq 0} a_{ij} x^i y^j \mid a_{ij} \in k\}$  ein vollständiges Vertretersystem von  $k[x, y]_{xy} / \text{im}(\partial^0)$  darstellt.

b)  $U$  ist nicht affin, denn sonst wäre nach Satz (3.4)  $H^1(U, \mathcal{O}_U) = 0$ .

**Aufgabe 3** Nur eine Beweisskizze. Sei  $\mathcal{L}$  eine invertierbare Modulgarbe auf  $X$  und  $\mathcal{U} = (U_i)$  eine offene Überdeckung, so dass

$$\varphi_i: \mathcal{L}|_{U_i} \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}_X|_{U_i}.$$

Wir definieren  $f_{ij} \in \text{Hom}_{\mathcal{O}_X|_{U_{ij}}}(\mathcal{O}_X|_{U_{ij}}, \mathcal{O}_X|_{U_{ij}})$  durch  $f_{ij} := \varphi_j \circ \varphi_i^{-1}$ . Dann ist  $f_{ij, U_{ij}}$  ein Automorphismus  $\mathcal{O}_X(U_{ij}) \rightarrow \mathcal{O}_X(U_{ij})$  von  $\mathcal{O}_X(U_{ij})$ -Moduln, und daher  $\alpha_{ij} := f_{ij, U_{ij}}(1) \in \mathcal{O}_X(U_{ij})^\times$ . Wegen  $f_{ik} = f_{kj}^{-1} \circ f_{ij}$  folgt

$$\alpha_{ik} = \alpha_{ij} \cdot \alpha_{jk}.$$

Also ist  $(\alpha_{ij})_{i,j} \in \check{H}^1(\mathcal{U}, \mathcal{O}_X^\times)$  und wir definieren

$$F: \text{Pic}(X) \longrightarrow \lim_{\mathcal{V}} \check{H}^1(\mathcal{V}, \mathcal{O}_X^\times), \quad [\mathcal{L}] \mapsto \langle (\alpha_{ij})_{i,j}, \mathcal{U} \rangle.$$

Man beachte, dass wir nach Hartshorne, III, Ex. 4.4 folgende Isomorphie haben

$$\lim_{\mathcal{V}} \check{H}^1(\mathcal{V}, \mathcal{O}_X^\times) \simeq H^1(X, \mathcal{O}_X^\times).$$

Sei nun umgekehrt  $\langle (\alpha_{ij}), \mathcal{U} \rangle \in \lim_{\mathcal{V}} \check{H}^1(\mathcal{V}, \mathcal{O}_X^\times)$  gegeben. Hierzu definieren wir eine invertierbaren  $\mathcal{O}_X$ -Modul durch die Verklebedaten  $\mathcal{L}_i := \mathcal{O}_X|_{U_i}$  und

$$\varphi_{ij}: \mathcal{L}_i|_{U_i \cap U_j} \xrightarrow{\cdot \alpha_{ij}} \mathcal{L}_j|_{U_i \cap U_j}.$$

Man beachte, dass wir aufgrund der Kozykelrelation die zum Verkleben notwendige Bedingung  $\varphi_{ik} = \varphi_{jk} \circ \varphi_{ij}$  haben. Wir definieren nun

$$G: \lim_{\mathcal{V}} \check{H}^1(\mathcal{V}, \mathcal{O}_X^\times) \longrightarrow \text{Pic}(X), \quad \langle (\alpha_{ij})_{i,j}, \mathcal{U} \rangle \mapsto [\mathcal{L}].$$

Es bleibt zu zeigen, dass  $F$  und  $G$  wohldefiniert und zueinander invers sind.