

Lösungsvorschlag 4. Übungsblatt Algebraischen Geometrie II

Aufgabe 1 Siehe Eisenbud, Commutative Algebra with a view towards Algebraic Geometry, Seite 627.

Aufgabe 2 Siehe Übung oder Vorlesung.

Aufgabe 3 Sei

$$0 \longrightarrow \mathcal{F}' \xrightarrow{\phi} \mathcal{F} \xrightarrow{\psi} \mathcal{F}'' \longrightarrow 0$$

mit welcher Garbe $\mathcal{F}'$. Sei $U \subseteq X$ offen. Es genügt in

$$0 \longrightarrow \mathcal{F}'(U) \longrightarrow \mathcal{F}(U) \longrightarrow \mathcal{F}''(U) \longrightarrow 0$$

die Exaktheit bei $\mathcal{F}''(U)$ zu zeigen, da der Rest bereits früher gezeigt wurde. Für $s \in \mathcal{F}''(U)$ betrachte man die Menge

$$\mathcal{M} := \{(t, V) \mid V \subseteq U \text{ offen, so dass es } t \in \mathcal{F}(V) \text{ gibt mit } \psi_V(t) = s|_V\}.$$

Da ψ surjektiv ist, gilt $\mathcal{M} \neq \emptyset$. Die Menge $\mathcal{M}$ ist partiell geordnet durch

$$(t_1, V_1) \leq (t_2, V_2) : \Longleftrightarrow V_1 \subseteq V_2 \text{ und } t_2|_{V_1} = t_1.$$

Sei nun

$$(t_1, V_1) \leq (t_2, V_2) \leq \dots$$

eine aufsteigende Kette von Elementen in $\mathcal{M}$. Dann ist $V := \cup_{i=1}^{\infty} V_i$ offen in X und das zweite Garbenaxiom für $\mathcal{F}$ impliziert, dass es ein $t \in \mathcal{F}(V)$ gibt, so dass $t|_{V_i} = t_i$ für alle i gilt. Nach dem Zornschen Lemma gibt es also maximale Elemente in $\mathcal{M}$. Sei $(\tilde{t}, \tilde{V})$ ein solches.

Behauptung: $\tilde{V} = U$

Wir zeigen die Behauptung durch Widerspruch. Angenommen $x \in U \setminus \tilde{V}$. Sei $V_x \subseteq U$ eine offene Umgebung von x und $t_x \in \mathcal{F}(V_x)$, so dass $\psi_{V_x}(t_x) = s|_{V_x}$. Da ψ surjektiv ist, existieren V_x und t_x . Sei nun $W := \tilde{V} \cap V_x$ und $u := t_x|_W - \tilde{t}|_W$. Dann folgt $\psi_W(u) = \psi_{V_x}(t_x)|_W - \psi_{\tilde{V}}(\tilde{t})|_W = s|_W - s|_W = 0$. Wegen der Exaktheit bei $\mathcal{F}(W)$ gibt es also ein $v \in \mathcal{F}'(W)$ mit $\varphi_W(v) = u$. Da $\mathcal{F}'$ welk ist, gibt es $\tilde{v} \in \mathcal{F}'(V_x)$ mit $\tilde{v}|_W = v$. Setzt man nun $\tilde{t}_x := t_x - \varphi_{V_x}(\tilde{v})$, so gilt:

$$\begin{aligned} \tilde{t}_x|_W &= t_x|_W - \varphi_{V_x}(\tilde{v})|_W \\ &= t_x|_W - \varphi_W(\tilde{v}|_W) \\ &= t_x|_W - \varphi_W(v) \\ &= t_x|_W - u = \tilde{t}|_W. \end{aligned}$$

Daher gibt es nach dem zweiten Garbenaxiom für $\mathcal{F}$ ein Element $\hat{t} \in \mathcal{F}(V_x \cup \tilde{V})$ mit der Eigenschaft

$$\hat{t}|_{V_x} = t_x, \quad \hat{t}|_{\tilde{V}} = \tilde{t}.$$

Wegen

$$\begin{aligned}\psi_{V_x \cup \tilde{V}}(\hat{t})|_{V_x} &= \psi_{V_x}(t_x) = s|_{V_x}, \\ \psi_{V_x \cup \tilde{V}}(\hat{t})|_{\tilde{V}} &= \psi_{\tilde{V}}(\tilde{t}) = s|_{\tilde{V}}\end{aligned}$$

folgt $\psi_{V_x \cup \tilde{V}}(\hat{t}) = s$, und somit $(\hat{t}, V_x \cup \tilde{V}) \in \mathcal{M}$. Widerspruch!

Aufgabe 4 Sei $U = \cup_{i=1}^n U_i$ eine offene Umgebung. Da X quasi-kompakt ist, genügt es endliche offene Überdeckungen zu betrachten.

Zum ersten Garbenaxiom: Seien mit $x = \langle s, \mathcal{F}_\alpha(U) \rangle$ und $y = \langle t, \mathcal{F}_\gamma(U) \rangle$ zwei Elemente in $\lim \mathcal{F}_\alpha(U)$ gegeben. Es gelte $x|_{U_i} = y|_{U_i}$ für alle i . Zu zeigen: $x = y$. Da $x|_{U_i} = y|_{U_i}$ gibt es für jedes i ein $\beta_i \geq \alpha, \gamma$, so dass

$$f_{\alpha, \beta_i, U_i}(s|_{U_i}) = f_{\gamma, \beta_i, U_i}(t|_{U_i}) \text{ in } \mathcal{F}_{\beta_i}(U_i)$$

gilt. Sei $\beta \geq \beta_i$ für alle i (beachte, dass es nur endlich viele i gibt). Dann gilt also für alle i

$$f_{\alpha, \beta, U}(s)|_{U_i} = f_{\alpha, \beta, U_i}(s|_{U_i}) = f_{\gamma, \beta, U_i}(t|_{U_i}) = f_{\gamma, \beta, U}(t)|_{U_i} \text{ in } \mathcal{F}_\beta(U_i).$$

Nach dem ersten Garbenaxiom für $\mathcal{F}_\beta$ ist also $f_{\alpha, \beta, U}(s) = f_{\gamma, \beta, U}(t)$, und daher $x = y$.

Zum zweiten Garbenaxiom: Seien $x_i = \langle s_i, \mathcal{F}_{\alpha_i}(U_i) \rangle \in \lim \mathcal{F}_{\alpha_i}(U_i)$ gegeben mit $x_i|_{U_{ij}} = x_j|_{U_{ij}}$, wobei $U_{ij} := U_i \cap U_j$. Dann gilt also

$$\langle s_i|_{U_{ij}}, \mathcal{F}_{\alpha_i}(U_{ij}) \rangle = x_i|_{U_{ij}} = x_j|_{U_{ij}} = \langle s_j|_{U_{ij}}, \mathcal{F}_{\alpha_j}(U_{ij}) \rangle.$$

Daher gibt es ein β mit $\beta \geq \alpha_i$ für alle i (hier geht wieder die Endlichkeit ein), so dass $f_{\alpha_i, \beta, U_{ij}}(s_i|_{U_{ij}}) = f_{\alpha_j, \beta, U_{ij}}(s_j|_{U_{ij}})$. Also auch

$$f_{\alpha_i, \beta, U_i}(s_i)|_{U_{ij}} = f_{\alpha_j, \beta, U_i}(s_j)|_{U_{ij}}.$$

Nach dem zweiten Garbenaxiom für $\mathcal{F}_\beta$ gibt es also $s \in \mathcal{F}_\beta(U)$, so dass $s|_{U_i} = f_{\alpha_i, \beta, U_i}(s_i)$ in $\mathcal{F}_\beta(U)$ für alle i gilt. Damit gilt schließlich

$$\langle s, \mathcal{F}_\beta(U) \rangle|_{U_i} = \langle s|_{U_i}, \mathcal{F}_\beta(U_i) \rangle = \langle f_{\alpha_i, \beta, U_i}(s_i), \mathcal{F}_\beta(U_i) \rangle = \langle s_i, \mathcal{F}_{\alpha_i}(U_i) \rangle = x_i.$$