Prof. W. Bley
Martha Pieropan 08.01.2014

11. Exercise sheet Algebraic Geometry I

Aufgabe 1 a) Sei $X = \mathrm{Spec}(A)$ ein affines Schema. Zeige: X ist genau dann nicht zusammenhängend, wenn A isomorph zu einem Produkt $A_1 \times A_2$ von Ringen ist, die beide nicht der Nullring sind.

b) Sei X ein beliebiges Schema. Zeige: X ist genau dann noethersch, wenn es eine offene affine Überdeckung

$$X = \bigcup_{i=1}^{m} U_i, \quad U_i = \mathrm{Spec}(A_i)$$

mit noetherschen Ringen A_i gibt.

Aufgabe 2 Sei A ein noetherscher Ring und $R := A[x_1, x_2, \ldots]$ der Polynomring in unendlich vielen Variablen. Sei J das Ideal von R, das von den Monomen $x_i x_j, i, j \in \mathbb{N}$, erzeugt wird.

a) Zeige, dass R/J nicht noethersch ist.
b) Zeige $\mathrm{Spec}(R/J) = \mathrm{Spec}(A)$ als topologische Räume.
c) Gib ein Beispiel eines nicht-noetherschen Schemas an, dessen topologischer Raum noethersch ist (oder sogar nur aus einem Punkt besteht).

Aufgabe 3 Sei

$$f(x, y) = y^2 - (x^m + a_1 x^{m-1} + \ldots + a_m), \quad a_j \in k$$

ein Polynom in zwei Variablen über dem Körper k. Dann induziert die Einbettung $k[x] \hookrightarrow k[x, y]/(f(x, y))$ einen Morphismus von affinen Schemata

$$\varphi : X = \mathrm{Spec}\,(k[x, y]/(f(x, y))) \longrightarrow Y = \mathrm{Spec}(k[x]).$$

a) Zeige, dass φ endlich ist.
b) Zeige, dass X und Y von endlichem Typ über k sind, d.h. die kanonischen Morphismen $X \longrightarrow \mathrm{Spec}(k)$ und $Y \longrightarrow \mathrm{Spec}(k)$ sind von endlichem Typ.

Aufgabe 4 Sei

$$g(x, y) = xy^2 - (x^m + a_1 x^{m-1} + \ldots + a_m), \quad a_j \in k, a_m \neq 0$$

ein Polynom in zwei Variablen über dem Körper k. Dann induziert die Einbettung $k[x] \hookrightarrow k[x, y]/(g(x, y))$ einen Morphismus von affinen Schemata

$$\psi : X = \mathrm{Spec}\,(k[x, y]/(g(x, y))) \longrightarrow Y = \mathrm{Spec}(k[x]).$$

Zeige, dass ψ von endlichem Typ, jedoch nicht endlich ist.