Prof. Dr. O. Forster

Sommersemester 2010
17. Juli 2010

Funktionentheorie

Klausur

Aufgabe 6. *

Diese Stern-Aufgabe ist **nicht obligatorisch**.
Nur bearbeiten, wenn alle anderen Aufgaben gelöst sind!

Seien $\alpha \geq 0$ und $\beta > 1 + \alpha$ reelle Zahlen. Man berechne das Integral

$$\int_0^\infty \frac{x^\alpha}{1 + x^\beta}\, dx.$$

Hinweis. Für $\alpha := 0$ und $\beta := 3$ wurde diese Aufgabe in den Übungen behandelt.

Proof. Seien

$$G := \mathbb{C} \setminus \{te^{\pi i(1/\beta+1)} | t \geq 0\},$$

$$S := \{z | \pi(1/\beta + 1) - 2\pi < Im(z) < \pi(1/\beta + 1)\}$$

und

$$L : G \to S$$

die Umkehrfunktion von $\exp|_S$.
(Dies ist ein Logarithmus auf der geschlitzten Ebene mit Schlitz in Richtung $e^{2\pi i \frac{1}{2}(1/\beta+1)}$ und $L(1) = 0$. Der Schlitz ist so gewählt, damit er den Integrationsweg nicht trifft.)
Es gilt für $z \in S$, dass $L(e^z) = z$ (also insbes. für $R > 0$ und $0 \leq t \leq 2\pi/\beta$, dass $L(Re^{it}) = \log(R) + it$).
Nun betrachte ich den Nenner, also die Funktion $G \to \mathbb{C}$ mit $z \mapsto 1 + e^{\beta L(z)}$. Sie wird genau dann Null, wenn $e^{\beta L(z)} = -1 \Leftrightarrow L(z) = i\pi(2n + 1)/\beta \Leftrightarrow z = e^{i\pi(2n+1)/\beta}$ mit $n \in \mathbb{Z}$ und $z \in S$, also für $-\beta/2 < n < \beta/2$. Die Menge ihrer Nullstellen werde mit N bezeichnet.
Seien nun f die holomorphe Funktion

$$f : G \setminus N \to \mathbb{C}, \qquad z \mapsto \frac{e^{\alpha L(z)}}{1 + e^{\beta L(z)}}$$

und für $R > 1$

$$\begin{aligned}
\gamma_1 &: [1/R, R] \to \mathbb{C}, && t \mapsto t;\\
\gamma_3 &: [1/R, R] \to \mathbb{C}, && t \mapsto te^{2\pi i/\beta};\\
\gamma_2 &: [0, 2\pi/\beta] \to \mathbb{C}, && t \mapsto Re^{it};\\
\gamma_4 &: [0, 2\pi/\beta] \to \mathbb{C}, && t \mapsto (1/R)e^{it}.
\end{aligned}$$

Es gilt, $\lim_{R\to\infty}\int_{\gamma_2} f(z)dz = 0$, weil

$$|\frac{e^{\alpha L(Re^{it})}}{1+e^{\beta L(Re^{it})}} iRe^{it}| = |\frac{e^{(\alpha-\beta)L(Re^{it})}}{e^{-\beta L(Re^{it})}+1}R| = |\frac{e^{(\alpha-\beta)(\log R+it)}}{e^{-\beta(\log R+it)}+1}R| = |\frac{R^{\alpha+1-\beta}}{R^{-\beta}e^{-\beta it}+1}| \to 0.$$

Weiterhin gilt, $\lim_{R\to\infty}\int_{\gamma_4} f(z)dz = 0$, weil

$$|\frac{e^{\alpha L((1/R)e^{it})}}{1+e^{\beta L((1/R)e^{it})}} i(1/R)e^{it}| = |\frac{e^{\alpha(\log(1/R)+it)}}{1+e^{\beta(\log(1/R)+it)}}(1/R)| = |\frac{R^{-\alpha}}{1+R^{-\beta}e^{\beta it}}(1/R)| \to 0.$$

Da die einzige Singularität von f im Inneren der aus γ_1, γ_2, $-\gamma_3$ und $-\gamma_4$ zusammengesetzten Kurve bei $e^{i\pi/\beta}$ liegt, folgt,

$$\begin{aligned}
2\pi i Res_{e^{i\pi/\beta}} f &= \lim_{R\to\infty}\left(\int_{\gamma_1} f(z)dz + \int_{\gamma_2} f(z)dz - \int_{\gamma_3} f(z)dz - \int_{\gamma_4} f(z)dz\right)\\
&= \lim_{R\to\infty}\left(\int_{\gamma_1} f(z)dz - \int_{\gamma_3} f(z)dz\right)\\
&= \lim_{R\to\infty}\left(\int_{1/R}^{R} \frac{e^{\alpha L(t)}}{1+e^{\beta L(t)}}dt - \int_{1/R}^{R} \frac{e^{\alpha L(te^{2\pi i/\beta})}}{1+e^{\beta L(te^{2\pi i/\beta})}} e^{2\pi i/\beta}dt\right)\\
&= \lim_{R\to\infty}\left(\int_{1/R}^{R} \frac{e^{\alpha\ln t}}{1+e^{\beta\ln t}}dt - e^{2\pi i/\beta}\int_{1/R}^{R} \frac{e^{\alpha(\ln t+2\pi i/\beta)}}{1+e^{\beta(\ln t+2\pi i/\beta)}}dt\right)\\
&= \lim_{R\to\infty}\left(\int_{1/R}^{R} \frac{t^\alpha}{1+t^\beta}dt - e^{2\pi i/\beta}\int_{1/R}^{R} \frac{t^\alpha e^{\alpha 2\pi i/\beta}}{1+t^\beta}dt\right)\\
&=(1-e^{2\pi i\frac{\alpha+1}{\beta}})\lim_{R\to\infty}\int_{1/R}^{R}\frac{t^\alpha}{1+t^\beta}dt.
\end{aligned}$$

Es bleibt, das Residuum zu bestimmen. Dazu leite ich den Nenner ab,

$$(1+e^{\beta L(z)})' = e^{\beta L(z)}\beta/z.$$

Die Ableitung nimmt bei $e^{i\pi/\beta}$ den Wert $-\beta e^{-i\pi/\beta} \neq 0$ an. Die Ordnung dieser Nullstelle ist also 1. Es folgt,

$$Res_{e^{i\pi/\beta}} f = \frac{e^{\alpha L(e^{i\pi/\beta})}}{-\beta e^{-i\pi/\beta}} = \frac{e^{\alpha i\pi/\beta}}{-\beta e^{-i\pi/\beta}} = -\frac{e^{i\pi\frac{\alpha+1}{\beta}}}{\beta},$$

und damit

$$\int_0^\infty \frac{t^\alpha}{1+t^\beta}dt = 2\pi i\frac{-\frac{e^{i\pi\frac{\alpha+1}{\beta}}}{\beta}}{1-e^{2\pi i\frac{\alpha+1}{\beta}}} = \frac{2\pi i}{\beta}\frac{e^{i\pi\frac{\alpha+1}{\beta}}}{e^{2\pi i\frac{\alpha+1}{\beta}}-1} = \frac{\pi}{\beta}\frac{2i}{e^{\pi i\frac{\alpha+1}{\beta}}-e^{-\pi i\frac{\alpha+1}{\beta}}} = \frac{\pi}{\beta}\frac{1}{\sin(\pi\frac{\alpha+1}{\beta})}.$$

□