Lösungen zu den Tutoriumsaufgaben

T1. Sei X eine Menge. Betrachte X als metrischen Raum mit der trivialen Metrik. Beschreiben Sie die offenen und abgeschlossenen Teilmengen von X.

Lösung Wir wissen aus der Vorlesung bereits, dass $\emptyset$ und X in metrischen Räumen sowohl offen als auch abgeschlossen sind.
Außerdem sind auch Punktmengen (beziehungsweise Singletons) $\{x\}$ für $x \in X$ immer abgeschlossen.
Aus der trivialen Metrik $d(x,y) := \begin{cases} 0 & x = y \\ 1 & x \neq y \end{cases}$ folgt, dass Singletons auch offen sind, denn:
Sei $x \in X$ beliebig. Dann gilt für $\epsilon \in (0,1)$, dass $B_\epsilon(x) = \{y \in X \mid d(x,y) < \epsilon\} = \{x\}$.
Somit ist $\{x\}$ $\forall x \in X$ per Definition offen.

Sei $A \subseteq X$ beliebig. Dann lässt sich A schreiben durch $A = \bigcup_{a \in A} \underbrace{\{a\}}_{offen}$. Damit ist A als beliebige Vereinigung offener Mengen ebenfalls offen.
$\Rightarrow$ Alle Teilmengen von X sind offen.

Für $B \in X$ beliebig gilt $X \backslash B$ ist als Teilmenge von X offen. $\Rightarrow$ B abgeschlossen.
$\Rightarrow$ Alle Teilmengen von X sind abgeschlossen und offen zugleich.

T2. Wir betrachten die Teilmenge $Y := \{\frac{1}{k} \mid k \in \mathbb{N}\} \subseteq \mathbb{R}$. Was ist ∂Y? Was ist $\mathring{Y}$? Was ist $\overline{Y}$?

Lösung

- Ein Punkt $x \in \mathbb{R}$ heißt Randpunkt von Y, wenn $\forall \epsilon > 0$ gilt: $B_\epsilon(x) \cap Y \neq \emptyset$ **(I)** und $B_\epsilon(x) \cap (\mathbb{R} \backslash Y) \neq \emptyset$ **(II)**. Annahme: $\partial Y = Y \cup \{0\}$.
  Beweis: Wir zeigen das zunächst „$\supseteq$“.
  Sei $x := \frac{1}{n}$ für $n \in \mathbb{N}$ beliebig, dann ist $x \in Y$. Sei nun $\epsilon > 0$ beliebig, dann gilt **(I)** trivialer weise. Wir müssen noch zeigen, dass $B_\epsilon(x) \cap (\mathbb{R} \backslash Y) \neq \emptyset$ **(II)** gilt.
  <u>Fall 1</u>: $\epsilon > \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$. Dann ist $z := \frac{1}{n} - \frac{\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}}{2}$ der Mittelpunkt zwischen $\frac{1}{n}$ und $\frac{1}{n+1}$ und somit nicht in Y, aber in $B_\epsilon(x)$. Somit gilt auch **(II)**.

  <u>Fall 2</u>: $\epsilon \leq \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$. Dann ist $z := \frac{1}{n} - \frac{\epsilon}{2}$ auf jeden Fall in $B_\epsilon(x)$ und nicht in Y. Somit gilt wieder **(II)**.

Zuletzt müssen wir zeigen, dass 0 in ∂Y ist. **(II)** gilt sofort, da $0 \notin Y$. Sei wieder $\epsilon > 0$ beliebig und $k \in \mathbb{N}$ derart, dass $\frac{1}{k} < \epsilon$. Dann ist $\frac{1}{k} \in Y$ und in $B_\epsilon(x)$. Somit gilt **(I)** und die eine Inklusion ist gezeigt.

Zeigen wir nun die andere Inklusion „$\subseteq$".
Sei $x \in \partial Y$ und es gelten **(I)** und **(II)**, dann muss x entweder ein Element von Y sein, oder ein Häufungspunkt, sonst ist **(I)** nicht erfüllt. Der einzige Häufungspunkt der Menge ist 0, also ist x entweder 0, oder $\in Y$.

Damit sind beide Inklusionen gezeigt.

- $\overset{\circ}{Y} = Y \backslash \partial Y = \emptyset$.
- $\overline{Y} = \partial Y \cup Y = Y \cup \{0\}$.

T3. Seien X, Y metrische Räume, und sei $f : X \to Y$ eine Abbildung.

(a) Zeigen Sie, dass f genau dann in $a \in X$ stetig ist, wenn es zu jeder Umgebung $V \subseteq Y$ von $f(a)$ eine Umgebung $U \subseteq X$ von a gibt mit $f(U) \subseteq V$.

(b) Zeigen Sie, dass f genau dann auf ganz X stetig ist, wenn Urbilder abgeschlossener Teilmengen von Y unter f wieder abgeschlossen sind.

Lösung (a) „$\Rightarrow$" Sei $V \subseteq Y$ eine Umgebung von $f(a)$.
Per Definition der Umgebung $\exists \epsilon > 0$ mit $B_\epsilon(f(a)) \subseteq V$ **(III)**.
Da $B_\epsilon(f(a))$ offen, gilt aus der Stetigkeit (Satz 1.26), dass $f^{-1}(B_\epsilon(f(a)))$ offen ist.

$$\overset{\text{Def. offen}}{\Rightarrow} \exists \delta > 0 : B_\delta(a) \subseteq f^{-1}(B_\epsilon(f(a)))$$

$$\Leftrightarrow f(B_\delta(a)) \subseteq B_\epsilon(f(a)) \quad \overset{(III)}{\subseteq} V$$

Setze nun $U := B_{\delta(a)}$.
„$\Leftarrow$" Wir müssen zeigen, dass f stetig ist. Sei also $\epsilon > 0$ gegeben. Dann ist $B_\epsilon(f(a))$ eine Umgebung von $f(a)$. Somit existiert eine Umgebung U von a mit $f(U) \subseteq B_\epsilon(f(a))$. Da U Umgebung $\exists \delta > 0$, so dass
$B_\delta(a) \subseteq U \Leftrightarrow f(B_\delta(a)) \subseteq f(U)$ $(\subseteq B_\epsilon(f(a)))$.
D.h. aber $d(f(x), f(a)) < \epsilon$ für alle $x \in X$ mit $d(x, a) < \delta$. Also ist das $\epsilon-\delta-$Kriterium erfüllt und f in a stetig.

(b) $U \subseteq Y$ ist abgeschlossen *genau dann wenn* $Y \backslash U$ offen.
Da $f^{-1}(Y \backslash U) = X \backslash f^{-1}(U) = (f^{-1}(U))^c$ ist $f^-1(U)$ *genau dann* abgeschlossen, *wenn* $f^{-1}(Y \backslash U)$ offen.
Folglich ist das Urbild von abgeschlossenen Teilmengen von Y eine abgeschlossene Teilmenge von X *genau dann wenn* die Urbilder aller offenen Teilmengen von Y wiederum offen in X sind.