Lösungen zu den Tutoriumsaufgaben

T1. Gegeben sei eine beliebige Menge X. Zeigen Sie, dass die Funktion

$$d : X \times X \longrightarrow \{0,1\}, \quad d(x,y) := \begin{cases} 0 & \text{für } x = y, \\ 1 & \text{für } x \neq y, \end{cases}$$

eine Metrik auf X definiert (d wird als die *diskrete* Metrik auf X bezeichnet).

Lösung d ist eine Abbildung von $X \times X$ nach $\mathbb{R}$. (per Definition) ✓

Zu zeigen sind die Eigenschaften (M1) bis (M4) aus Definition 1.5.

Sei $x, y, z \in X$. Es gilt:

$d(x,y) \in \{0,1\}$ (per Definition) $\Rightarrow$ (M1) ✓

$d(x,y) = 0$ genau dann, wenn $x = y$ (per Definition) $\Rightarrow$ (M2) ✓

d.h., d ist positiv definit.

d ist symmetrisch, da $(x = y) \Leftrightarrow (y = x)$ und $(x \neq y) \Leftrightarrow (y \neq x)$. $\Rightarrow$ (M3) ✓

Fallunterscheidung für (M4):
zu zeigen: $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$

Fall 1: $x = y$. $\Rightarrow d(x,y) = 0$,
wobei die rechte Seite aufgrund von (M1) nicht negativ sein kann. ✓

Fall 2: $x \neq y$. $\Rightarrow d(x,y) = 1$
Es bleibt zu zeigen, dass dann die rechte Seite größer als Null ist.
Für $z = x$ ist $z \neq y$ und somit $d(x,z) + d(z,y) = 1$.
Für $z = y$ ist $z \neq x$ und somit $d(x,z) + d(z,y) = 1$.
Ist $z \neq y$ und $z \neq x$, so ist $d(x,z) + d(z,y) = 2$.
Die rechte Seite ist also größer 0 für $x \neq y$ und die Ungleichung gilt. ✓

d definiert somit eine Metrik auf X.

T2. Betrachten Sie die Menge $\overline{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cup \{\infty\} \cup \{-\infty\}$ sowie die Funktion

$$f : \overline{\mathbb{R}} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) := \begin{cases} -1 & \text{für } x = -\infty, \\ \frac{x}{1+|x|} & \text{für } x \in \mathbb{R}, \\ 1 & \text{für } x = \infty. \end{cases}$$

Zeigen Sie, dass durch

$$d : \overline{\mathbb{R}} \times \overline{\mathbb{R}} \longrightarrow \mathbb{R}_0^+, \quad d(x,y) := |f(x) - f(y)|$$

eine Metrik auf $\overline{\mathbb{R}}$ definiert wird.

Lösung Die Definitions- und Wertebereiche stimmen. Analog zu T1 zeigen wir (M1) bis (M4).

(M1) ✓ (per Definition des Betrags in $\mathbb{R}$)

(M2) Ist $x = y$, so ist $d(x,y) = |f(x) - f(x)| = 0$. Ist umgekehrt $d(x,y) = 0$, so folgt zunächst $f(x) = f(y)$. Um zu schließen, dass $x = y$, bleigt zu zeigen, dass f injektiv ist. Dazu genügt es zu zeigen, dass f streng monoton steigend ist

(aus $x < y \Rightarrow f(x) < f(y)$ folgt $x \neq y \Rightarrow f(x) \neq f(y)$, und daraus folgt $f(x) = f(y) \Rightarrow x = y$).

Betrachte f zunächst auf dem Intervall $]-\infty, 0[$. Dort gilt $f(x) = \frac{x}{1-x}$. Also ist f dort differenzierbar mit $f'(x) = \frac{1}{(1-x)^2} > 0$, d.h., f ist dort streng monoton steigend. Auf dem Intervall $]0, \infty[$ gilt $f(x) = \frac{x}{1+x}$. Also ist f auch dort differenzierbar mit $f'(x) = \frac{1}{(1+x)^2} > 0$, d.h., f ist auch dort streng monoton steigend.

Schließlich gilt für $x \in]-\infty, 0[$

$$f(-\infty) = -1 < \frac{x}{1-x} < 0 = f(0)$$

und für $x \in]0, \infty[$

$$f(0) = 0 < \frac{x}{1+x} < 1 = f(\infty),$$

so dass f auch insgesamt streng monoton steigend ist.

Es folgt Injektivität und damit (M2) ✓

(M3) d ist symmetrisch, da aufgrund der Eigenschaften des Betrags gilt:
$d(x,y) = |f(x) - f(y)| = |(-1)(f(x) - f(y))| = |f(y) - f(x)| = d(y,x)$.

(M4) Die Dreiecksungleichung für d lässt sich auf die Dreiecksungleichung für relle Zahlen zurückführen:

$$d(x,y) = |f(x) - f(y)| = |f(x) - f(z) + f(z) - f(y)| \leq$$

$$\leq |f(x) - f(z)| + |f(z) - f(y)| = d(x,z) + d(z,y)$$

d ist folglich eine Metrik.

T3. Betrachte die Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$, in $\mathbb{R}^2$ und bestimmen Sie den Grenzwert, sofern er existiert:

$$\begin{aligned} a_n &= \left(\frac{1}{n}\cos\left(\frac{\pi n}{2}\right), \frac{1}{n}\sin\left(\frac{\pi n}{2}\right)\right), \\ b_n &= \left(\cos\left(\frac{\pi n}{4}\right), \sin\left(\frac{\pi n}{4}\right)\right), \\ c_n &= \left(\cos\left(\frac{\pi}{4n}\right), \sin\left(\frac{\pi}{4n}\right)\right). \end{aligned}$$

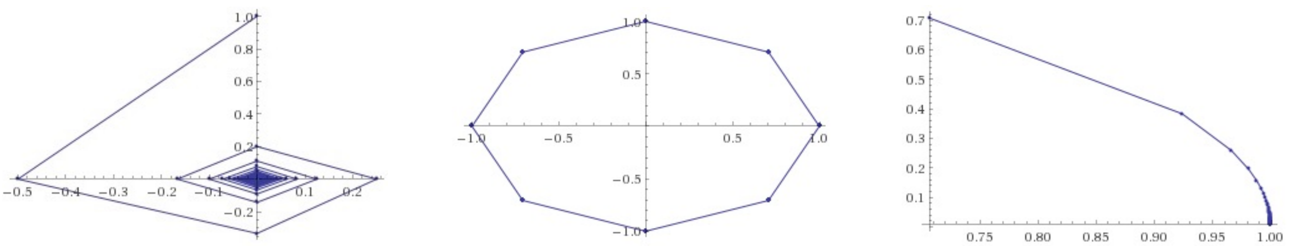
Lösung Verwende Satz 1.10: Eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathbb{R}^k$ konvergiert genau dann gegen ein $x \in \mathbb{R}^k$, wenn jede der k Komponentenfolgen $(x_{ni})_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathbb{R}$ gegen die i-te Komponente von x konvergiert, wobei $i = 1, ..., k$. Wir betrachten also 6 verschiedene Komponentenfolgen mit:

$$\begin{aligned} a_{n1} &= \frac{1}{n}\cos\left(\frac{\pi n}{2}\right), & b_{n1} &= \cos\left(\frac{\pi n}{4}\right), & c_{n1} &= \cos\left(\frac{\pi}{4n}\right), \\ a_{n2} &= \frac{1}{n}\sin\left(\frac{\pi n}{2}\right), & b_{n2} &= \sin\left(\frac{\pi n}{4}\right), & c_{n1} &= \sin\left(\frac{\pi}{4n}\right). \end{aligned}$$

$(a_{n1})_{n\in\mathbb{N}}$ und $(a_{n2})_{n\in\mathbb{N}}$ konvergieren für $n \to \infty$ gegen 0, da $\frac{1}{n}$ eine Nullfolge ist und $\cos(x)$ bzw. $\sin(x)$ beschränkt (≤ 1) sind. Also konvergiert $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ für $n \to \infty$ gegen $(0,0) \in \mathbb{R}^2$.

$(b_{n1})_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_{n2})_{n\in\mathbb{N}}$ sind periodisch und konvergieren nicht, sondern haben fünf Häufungspunkte bei $\pm 1, \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$ und 0. $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ divergiert also in $\mathbb{R}^2$.

$(c_{n1})_{n\in\mathbb{N}}$ und $(c_{n2})_{n\in\mathbb{N}}$ konvergieren für $n \to \infty$ gegen 1 bzw. 0, da das jeweilge Argument $\frac{\pi}{4n}$ eine Nullfolge ist und weil $\sin(\cdot)$ und $\cos(\cdot)$ stetige Funktionen sind. Also konvergiert $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ für $n \to \infty$ gegen $(1,0) \in \mathbb{R}^2$.



(a) $(a_{n1})_{n\in\mathbb{N}}$ (b) $(b_{n1})_{n\in\mathbb{N}}$ (c) $(c_{n1})_{n\in\mathbb{N}}$

Abbildung 1: Die ersten 100 Schritte der 3 Folgen in $\mathbb{R}^2$